恒等式と方程式

高橋（たかはし）　敏雄（としお）

§0. はじめに

一連の整数解の問題と代数方程式を問題にする方程式には，日頃使用している整式の展開公式が使われていることに，ほとんど気づいていない。それは，我々が生徒に教えているほど複雑ではない，ということにも気づいていないのである。

例えば，２次方程式の解の公式を導く場合，ピタゴラス数の一般式を導く場合，などがそれである。ここで紹介する式は，高校で学ぶごく初期の展開式であり，新しいものはない。しかし，恒等式と方程式は，意外に関係が深いことに気づくのである。

§1. 整数解の問題

ここで使う l，m，n は整数値とする。

1. $x^2+y^2=z^2$ の整数解

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ ……①

この式を使って，ピタゴラス数の一般式を求めてみよう。

$4ab$ を平方数にすることがポイントになる。

すなわち，$a=m^2$，$b=n^2$ とおけばよい。

$4ab=4m^2n^2=(2mn)^2$ となるからである。

さらに，$x=a-b=m^2-n^2$，$y=2mn$，

$z=a+b=m^2+n^2$ とおくと，

①は $x^2+y^2=z^2$ ……② となる。

したがって，$x=m^2-n^2$，$y=2mn$，$z=m^2+n^2$

2. $x^2+y^2+z^2=u^2$ の整数解

(i) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ を使う場合

このとき，$2ab$ を完全平方にするのがポイントになる。

すなわち，$a=2m^2$，$b=n^2$ とおくと，

$x=a=2m^2$，$y=2mn$，$z=n^2$，

$u=2m^2+n^2$

は，$x^2+y^2+z^2=u^2$ の整数解となる。

例えば，$m=1$，$n=3$ とおくと，

$x=2$，$y=6$，$z=9$，$u=11$ となり，

$2^2+6^2+9^2=11^2$ が成り立つ。

(ii) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ を使う場合

この式で $ab+bc+ca=0$ とする。

$a+b\neq 0$ の条件で $c=-\dfrac{ab}{a+b}$

この式を上式に代入。

$$\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right)^2=a^2+b^2+\left(-\frac{ab}{a+b}\right)^2$$

両辺に $(a+b)^2$ を掛けると

$$(a^2+ab+b^2)^2=\{a(a+b)\}^2+\{b(a+b)\}^2+(ab)^2$$

$a=m$，$b=n$ に置き換えて，

$x=m(m+n)$，$y=n(m+n)$，$z=mn$，

$u=m^2+mn+n^2$

とおくと，$x^2+y^2+z^2=u^2$ の整数解になる。

例えば，$m=1$，$n=2$ とおく。

$x=3$，$y=6$，$z=2$，$u=7$

$2^2+3^2+6^2=7^2$

(i)，(ii)の２つの解は全く別の解のように思えるが，不明。

3. $x^2+y^2+z^2+w^2=t^2$ の整数解

次に，$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

ここで，$ab+bc+ca=2k^2$ が成り立てば，

$x^2+y^2+z^2+w^2=t^2$ ……③

の整数解が得られそうである。

$ab+bc+ca=2k^2$ から $a+b\neq 0$ の条件で

$$c=\frac{2k^2-ab}{a+b}$$

この式を展開式に代入する。

$$a^2+b^2+\left(\frac{2k^2-ab}{a+b}\right)^2+(2k)^2$$
$$=\left(a+b+\frac{2k^2-ab}{a+b}\right)^2$$

両辺に $(a+b)^2$ を掛けると

$$\{a(a+b)\}^2+\{b(a+b)\}^2+(2k^2-ab)^2+\{2k(a+b)\}^2=(2k^2+a^2+ab+b^2)^2$$

この式から，③の解を求めることができる。

$a=l$，$b=m$，$k=n$ に置き換えて③の整数解を得る。すなわち，

$$x=l(l+m),\ y=m(l+m),\ z=2n^2-lm,$$
$$w=2n(l+m),\ t=l^2+lm+m^2+2n^2$$

である。

例えば，$l=1$，$m=2$，$n=3$ とおくと，

$x=3$，$y=6$，$z=16$，$w=18$，$t=25$ から

$3^2+6^2+16^2+18^2=25^2$ が成り立つ。

※　2の(ii)は，この場合の $k=0$ のときである。

4. $x^3+y^3+3z^2=u^3+v^3$ の整数解

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad \cdots\cdots④$$

を使う。

$$(\text{左辺})=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}$$
$$=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca) \quad \cdots\cdots⑤$$

この式で，$ab+bc+ca=0$ となるようにする。

$a+b\neq 0$ の条件で $c=-\dfrac{ab}{a+b}$ となる。

このとき⑤の式は，

$$a^3+b^3+\left(-\frac{ab}{a+b}\right)^3+3ab\cdot\frac{ab}{a+b}$$
$$=\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right)^3 \quad \cdots\cdots⑥$$

ここで，⑥の両辺に $(a+b)^3$ を掛ける。⑥の式は，

$$\{a(a+b)\}^3+\{b(a+b)\}^3-(ab)^3+3\{ab(a+b)\}^2$$
$$=(a^2+ab+b^2)^3$$

$$\therefore\ \{a(a+b)\}^3+\{b(a+b)\}^3+3\{ab(a+b)\}^2$$
$$=(a^2+ab+b^2)^3+(ab)^3$$

$a=m$，$b=n$ に置き換えて，

$$x=m(m+n),\ y=n(m+n),$$
$$z=mn(m+n),\ u=m^2+mn+n^2,\ v=mn$$

とおくと，この式は，$x^3+y^3+3z^2=u^3+v^3$ の整数解になる。

例えば，$m=2$，$n=3$ とおくと，

$x=10$，$y=15$，$z=30$，$u=19$，$v=6$

$10^3+15^3+3\cdot 30^2=19^3+6^3$

5. $x^6+y^6+3z^2=u^6$ の整数解

$$a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3 \quad \cdots\cdots①$$

この式に $a\to a^2$，$b\to b^2$ を代入すると，

$$a^6+b^6+3(ab)^2(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^3 \quad \cdots\cdots②$$

ここで，a^2+b^2 が完全平方になれば，式も更に面白いと思う。

これは $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$a^2+b^2=(m^2+n^2)^2$ になる。

②に代入すると，

$$(m^2-n^2)^6+(2mn)^6$$
$$+3\{(2mn)(m^2-n^2)\}^2(m^2+n^2)^2=(m^2+n^2)^6$$

となる。新たに次のような方程式をつくる。

$x^6+y^6+3z^2=u^6$ の整数解は，

$$x=m^2-n^2,\ y=2mn,$$
$$z=xyu=2mn(m^4-n^4),\ u=m^2+n^2$$

である。

例えば，$m=3$，$n=2$ とおくと，

$x=5$，$y=12$，$z=5\cdot 12\cdot 13=780$，$u=13$

であるから，

$5^6+12^6+3\cdot 780^2=13^6$

が成り立つ。

この問題は，また次のようにも書き換えることができる。

s，t，u を整数値とする。

$$s^2+t^2=u^2 \Longrightarrow s^6+t^6+3(stu)^2=u^6$$

が成り立つ。

6. $x^3+y^3+z^3+u^3=v^3$ の整数解

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$$
$$=3(b+c)(c+a)(a+b)$$ の因数分解を使う。

ポイントは $3(b+c)(c+a)(a+b)$ を立方式になるように変形することである。

すなわち，$\begin{cases} b+c=3l^3 \\ c+a=3m^3 \\ a+b=n^3 \end{cases}$ とおく。

これを解いて，$\begin{cases} a=\dfrac{-3l^3+3m^3+n^3}{2} \\ b=\dfrac{3l^3-3m^3+n^3}{2} \\ c=\dfrac{3l^3+3m^3-n^3}{2} \end{cases}$

この式をもとの因数分解の式に代入すると，

$$\left(\frac{3l^3+3m^3+n^3}{2}\right)^3-\left(\frac{-3l^3+3m^3+n^3}{2}\right)^3$$
$$-\left(\frac{3l^3-3m^3+n^3}{2}\right)^3-\left(\frac{3l^3+3m^3-n^3}{2}\right)^3$$
$$=(3mnl)^3$$

両辺に 2^3 を掛けて変形する。

$$(3l^3+3m^3+n^3)^3$$

$$=(-3l^3+3m^3+n^3)^3+(3l^3-3m^3+n^3)^3+(3l^3+3m^3-n^3)^3+(6mnl)^3$$

が成り立つことになる。

よって，$x^3+y^3+z^3+u^3=v^3$ の整数解は

$$\begin{cases} x=-3l^3+3m^3+n^3 \\ y=3l^3-3m^3+n^3 \\ z=3l^3+3m^3-n^3 & \cdots\cdots(*) \\ u=6lmn \\ v=3l^3+3m^3+n^3 \end{cases}$$

で与えられる。

例えば，$l=3$，$m=5$，$n=7$ とおくと，解の 1 つは，

$$x=637,\ y=49,\ z=113,\ u=630,\ v=799$$

すなわち，$637^3+49^3+113^3+630^3=799^3$ が成り立つことになる。

また，(*)が正の整数解をもつためには，この x，y，z が三角形の 3 辺と考えて，

$$3|l^3-m^3|\leqq n^3\leqq 3(l^3+m^3)$$

を得る。この不等式を満たす n を求めればよい。

※ 断っておくが，ここで扱った整数解の式は解の一部であって，すべてであるのかどうかは不明である。なおピタゴラス数は尽されている。

また，私は

$$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$$
$$=5(a+b)(b+c)(c+a)\times(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

の因数分解を計算で得たが，

$$(a+b+c)^5$$
$$=a^5+b^5+c^5+\frac{5}{2}(a+b)(b+c)(c+a)\times\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$$

この式から

$$(a+b)(b+c)(c+a)\times\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}=0$$

はあり得ないので，この因数分解の式からは，$x^5+y^5+z^5=u^5$ の整数解を求めることはできない。

$$\frac{5}{2}(a+b)(b+c)(c+a)\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$$

この式が整数の 5 乗になれば，$x^5+y^5+z^5+u^5=w^5$ が成り立つことになるが，それは今後の課題である。

§2. 代数方程式の問題

1. 2 次方程式を解く

2 次方程式については，次の恒等式を使う。

$$(u+v)^2=u^2+v^2+2uv$$
$$=u^2+v^2+2u(u+v)-2u^2$$
$$=2u(u+v)-u^2+v^2$$

$$\therefore\quad (u+v)^2-2u(u+v)+u^2-v^2=0 \quad\cdots\cdots①$$

ここで，$x=u+v$，$-2u=a$，$u^2-v^2=b$ ……②

とおくと，①は 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ になる。

この解は，②より，

$$u=-\frac{a}{2},\quad v^2=u^2-b=\frac{a^2}{4}-b=\frac{a^2-4b}{4}$$

$$\therefore\quad v=\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

ゆえに，2 次方程式の解の公式を得る。

$$x=u+v=-\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

2. 3 次方程式を解く

3 次方程式については，次の恒等式

$(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$ から

$$(u+v)^3-3uv(u+v)-u^3-v^3=0 \quad\cdots\cdots③$$

ここで，

$$x=u+v,\ -3uv=a,\ -u^3-v^3=b \quad\cdots\cdots④$$

とおくと，③は，3 次方程式 $x^3+ax+b=0$ になり，恒等式が方程式になる。

その解は④により

$$\begin{cases} u^3+v^3=-b \\ u^3v^3=-\dfrac{a^3}{27} \end{cases}$$ を解く。

u^3，v^3 は 2 次方程式 $t^2+bt-\dfrac{a^3}{27}=0$ の解である。

このことから u，v を決め，$x=u+v$ の値が 3 次方程式の解となる。

3. 4 次方程式を解く

さて 4 次方程式については，どうなるか。次の恒等式を使うのである。

$$(u+v+w)^4=\{u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu)\}^2$$
$$=(u^2+v^2+w^2)^2+4(uv+vw+wu)(u^2+v^2+w^2)+4(uv+vw+wu)^2$$
$$=(u^2+v^2+w^2)^2+4(uv+vw+wu)(u^2+v^2+w^2)+4\{u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2+2uvw(u+v+w)\}$$
$$=(u^2+v^2+w^2)^2+2(u^2+v^2+w^2+2uv+2vw+2wu)(u^2+v^2+w^2)-2(u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+8uvw(u+v+w)$$

$$=2(u^2+v^2+w^2)(u+v+w)^2+8uvw(u+v+w)$$
$$+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)-(u^2+v^2+w^2)^2$$

$$\therefore\quad (u+v+w)^4-2(u^2+v^2+w^2)(u+v+w)^2$$
$$-8uvw(u+v+w)$$
$$-4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+(u^2+v^2+w^2)^2=0 \quad\cdots\cdots④$$

ここで，$x=u+v+w$，$-2(u^2+v^2+w^2)=a$，

$$-8uvw=b,$$
$$-4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+(u^2+v^2+w^2)^2=c \quad\cdots\cdots⑤$$

とおくと，④は，4 次方程式 $x^4+ax^2+bx+c=0$ になる。⑤から，

$$\begin{cases} u^2+v^2+w^2=-\dfrac{a}{2} \\ u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=\dfrac{a^2-4c}{16} \\ u^2v^2w^2=\dfrac{b^2}{64} \end{cases}$$

ここで，u^2，v^2，w^2 は 3 次方程式

$$t^3+\frac{a}{2}t^2+\frac{a^2-4c}{16}t-\frac{b^2}{64}=0$$

の解になる。こうして，$x=u+v+w$ により 4 次方程式の解が得られる。

§3. おわりに

高校で習う極めて単純な展開式から整数解の解法が得られた。これは初めに解を見つけた後，方程式をつくるという方法である。すなわちその方程式は

$$x^2+y^2=z^2,\quad x^2+y^2+z^2=u^2,$$
$$x^2+y^2+z^2+w^2=t^2,\quad x^3+y^3+3z^2=u^3+v^3$$

あるいは　$x^6+y^6+3z^2=u^6$，$x^3+y^3+z^3+u^3=v^3$

であった。高校で使う展開式，因数分解式を使うことにより，単純に整数解をもつ式をつくりあげた。

逆に，この問題を解けとなると，おそらく相当時間が掛かるのではないかと思われる。

そして，同じような手法で，2 次，3 次，4 次の代数方程式の解法も簡単に試みてみた。ここで得られた結果は，理論的に解の公式があるということであり，実際に解くのは難しい。

さて，5 次以上の代数方程式は，

$$(t+u+v+w)^5+e(t+u+v+w)^3$$
$$+f(t+u+v+w)^2+g(t+u+v+w)+h=0$$

を満たす t，u，v，w の式とする e，u，v，w がわかれば，その連立方程式

$$e(t,\ u,\ v,\ w)=a,\quad f(t,\ u,\ v,\ w)=b,$$
$$g(t,\ u,\ v,\ w)=c,\quad h(t,\ u,\ v,\ w)=d$$

を解くことから t，u，v，w の値がわかり，5 次方程式 $x^5+ax^3+bx^2+cx+d=0$ が一般的に解けることになる。すなわち，5 次方程式が解けるということになるが，しかし，アーベル，ガロア等の天才が，既に 19 世紀初期にその不可能性を証明している。

今後の展望として，複雑な展開式の中に整数解の問題，代数方程式の問題が出てくるやもしれない。それはどうなるかわからない。

今回の論考は，近頃私が考えたことで，面白いと思ったのでここに紹介した。

尚，本稿提出後，次の方程式の整数解を同様の方法で得ましたが，原稿の都合上，方程式だけを記しておきます。

$$x^2+y^2=z^3,\quad x^2+y^2=z^4,\quad x^2+y^3=z^2$$
$$x^3+y^3+z^3+u^4=w^3,\quad x^3+y^3+z^3+u^2=w^3,$$
$$x^5+y^5+z^5+5u^2=w^5,\quad x^3+y^3=z^2$$

以上です。

(長崎県立大村工業高等学校)