極・極線と調和点列

河合（かわい） 進輔（しんすけ）

§0. はじめに

極・極線と調和点列は，大学の入試問題の題材にされることが多い。これらのことをまとめてみたいと思っていたところ，丁度，2006 年度の神戸大学の入試に出題されたので，生徒向けに解説した。以下は，それを少し一般化し整理したものである。

§1. 極・極線とは

2 次曲線Cの接点 P$(x_1,\ y_1)$ における接線の公式は，点Pがその 2 次曲線上にない場合でも形式的に x_1，y_1 の値を代入することによって，1 つの直線を表す。その直線を点Pの極線といい，Pを極という。また，点Pから 2 次曲線Cに 2 本の接線が引けるとき，点Pの極線は 2 つ接線の接点を通る。

一般に，2 次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2px+2qy+c=0$$

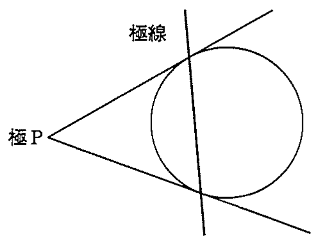
について，極 P$(x_1,\ y_1)$ の極線は

$$ax_1x+h(x_1y+y_1x)+by_1y+p(x+x_1)+q(y+y_1)+c=0$$

である。特に高校でよく扱われるのは，円 $x^2+y^2=r^2$ について，

$$x_1x+y_1y=r^2$$

である。



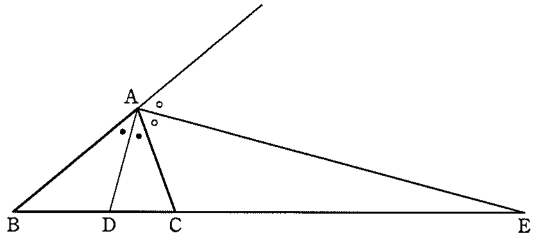
§2. 調和点列とは

線分 PQ を $m:n$ $(m<n)$ に内分する点をR，外分する点をSとするとき，4 点P，Q，R，Sを調和点列といい，

$$\frac{1}{\mathrm{PR}}+\frac{1}{\mathrm{PS}}=\frac{2}{\mathrm{PQ}}$$

が成り立つ。この式は，PQ が PR と PS の調和平均であることを示している。

例えば，下図 △ABC において，頂点Aでの内角および外角の二等分線と直線 BC との交点をそれぞれ D，E とすると，4 点 B，D，C，E は調和点列をなす。



§3. 具体的な問題例

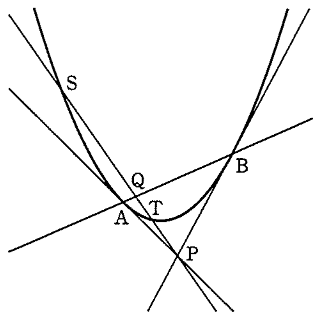
次の 2006 年度神戸大学前期の問題は，放物線における極・極線と調和点列を題材にした問題である。

xy 平面において，放物線 $C:y=x^2$ とその下側にある点 P$(p,\ q)$ $(q<p^2)$ を考える。Pを通るようなCの 2 つの接線を考え，その接点をそれぞれ A，B とする。また，P を通る傾きmの直線がCと相異なる 2 点 S，T で交わるとする。
点 A，B の x 座標をそれぞれ a，b とし，点 S，T の x 座標をそれぞれ s，t とする。次の問いに答えよ。

(1) $a+b$，ab を p，q で表せ。

(2) $s+t$，st を p，q，m で表せ。

(3) 直線 AB と直線 ST の交点をQとし，Qの x 座標を u とする。図のように $s<u<t<p$ となる場合について，等式 $\dfrac{1}{\mathrm{PS}}+\dfrac{1}{\mathrm{PT}}=\dfrac{2}{\mathrm{PQ}}$ が成立することを示せ。



この問題は，放物線における本稿の内容そのものになっている。極線の式を使ってこの問題を解くと次のようになる。

(1) 直線ABは，放物線 $x^2-y=0$ に関する極Pの極線であるから，その方程式は

$$px-\frac{1}{2}(y+q)=0$$

この式と $x^2-y=0$ より

$$x^2-2px+q=0$$

この2次方程式の解が a, b であるから，解と係数の関係より

$$a+b=2p,\ ab=q \quad \cdots\cdots \text{答}$$

(2) 直線PQの方程式は $y=m(x-p)+q$

この式と $y=x^2$ より

$$x^2-mx+mp-q=0$$

この2次方程式の解が s, t であるから，解と係数の関係より

$$s+t=m,\ st=mp-q \quad \cdots\cdots \text{答}$$

(3) P, Q, S, Tから，x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれP′, Q′, S′, T′とすると

$\dfrac{1}{\mathrm{P'S'}}+\dfrac{1}{\mathrm{P'T'}}=\dfrac{2}{\mathrm{P'Q'}}$ が成立することを示せばよい。

$$\frac{1}{\mathrm{P'S'}}+\frac{1}{\mathrm{P'T'}}=\frac{1}{p-s}+\frac{1}{p-t}$$

$$=\frac{2p-(s+t)}{(p-s)(p-t)}$$

$$=\frac{2p-m}{p^2-q} \qquad \text{(注参照)}$$

$$\begin{cases} y=m(x-p)+q \\ y=2px-q \end{cases} \text{から}\ u=\frac{mp-2q}{m-2p}$$

$$\frac{2}{\mathrm{P'Q'}}=\frac{2}{p-u}=\frac{2}{p-\dfrac{mp-2q}{m-2p}}$$

$$=\frac{2(m-2p)}{-2p^2+2q}=\frac{2p-m}{p^2-q}$$

よって $\dfrac{1}{\mathrm{P'S'}}+\dfrac{1}{\mathrm{P'T'}}=\dfrac{2}{\mathrm{P'Q'}}$ (証明終)

(注) 分母は(2)より

$$x^2-mx+mp-q=(x-s)(x-t)$$

この式で $x=p$ とすると簡単。

§4. より具体的な例

生徒に示したプリントでは，次のような具体例を挙げた。

> **【例1】** 円 $x^2+y^2=25$ について，
> 極P$(-1,\ 7)$ の極線は $-x+7y=25$
> Pを通る直線 $7x+y=0$ と円との交点をS, Tとし，極線との交点をQとする。また，4点P, S, Q, Tから，x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれP′, S′, Q′, T′とする。
> ただし，(Sの x 座標)<(Tの x 座標) とする。

$$\begin{cases} 7x+y=0 \\ -x+7y=25 \end{cases} \text{から}\ x=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 7x+y=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \text{から}\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，P′, S′, Q′, T′の x 座標は順に

$$-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{であり，}$$

$\dfrac{1}{\mathrm{P'S'}}+\dfrac{1}{\mathrm{P'T'}}=\dfrac{2}{\mathrm{P'Q'}}$ の両辺の値は4となり一致するので，4点P, S, Q, Tは調和点列である。

> **【例2】** 放物線 $y=x^2$ について，$(x_1,\ y_1)$ における接線の式は，$y+y_1=2x_1x$ であるから
> 極P$\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$ の極線は，$y=x+2$
> Pを通る直線 $y=6x-5$ と放物線との交点をS, Tとし，極線との交点をQとする。また，4点P, S, Q, Tから，x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれP′, S′, Q′, T′とする。
> ただし，(Sの x 座標)<(Tの x 座標) とする。

$$\begin{cases} y=6x-5 \\ y=x+2 \end{cases} \text{から}\ x=\frac{7}{5}$$

$$\begin{cases} y=6x-5 \\ y=x^2 \end{cases} \text{から}\ x=1,\ 5$$

P′, S′, Q′, T′の x 座標は順に

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{7}{5},\ 5\quad \text{であり，}$$

$\dfrac{1}{\mathrm{P'S'}}+\dfrac{1}{\mathrm{P'T'}}=\dfrac{2}{\mathrm{P'Q'}}$ の両辺の値は $\dfrac{20}{9}$ となり一致するので，4点P, S, Q, Tは調和点列である。ちなみに同じ神戸大学前期の問題に次のような問題がある。

平面上に，原点Oから出る相異なる2本の半直線OX，OYをとり，$\angle XOY<180°$ とする半直線OX上にOと異なる点Aを，半直線OY上にOと異なる点Bをとり，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点Cが $\angle XOY$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ はある実数 t を用いて
$\vec{c}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

(2) $\angle XOY$ の二等分線と $\angle XAB$ の二等分線の交点をPとおくとき，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および3辺の長さ $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$|\vec{b}-\vec{a}|$ を用いて表せ。

この問題は，$\triangle OAB$ の $\angle O$ 内の傍心 I_0 を求める問題であるが，前頁の§2. の図で，点Cをそのまま Cとし，点BをO，点Dを $\triangle OAB$ の内心I，点Eを I_0 として考えられるので，4点O，I，C，I_0 は，調和点列である。

§5. 最後に

以上のように，この問題は初等幾何から2次関数，2次曲線にわたる内容を含んでいる。また，a，b，c が調和数列ならば，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$ が成り立つので数列とも関連しているので，知識をつなげるのに良い題材である。　　　(兵庫県　須磨学園高等学校)