—数研通信 59 号を読んで (3)—

組み分けの総数の種々の公式と $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$ の組合せ論的な意味について

村井(むらい)　靖雄(やすお)

§1. 概要

m 個のモノを n 個の組に分けるときの分け方の総数 N_n^m は，集合の要素の個数の公式を用いて，

$$N_n^m=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k(n-k)^m$$

で表されることを示します。

この式を出発点として，数研通信 No.59 で導かれた公式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n! \qquad (1)$$

を自然に導き，この公式の組合せ論的な意味を解説します。

また，N_n^{n+k} $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ を与える式を導き，さらに，二重数列 $\{N_n^m\}_{m\geq1,\,n\geq1}$ の漸化式が完全順列に類似した，3 項間漸化式で表せることを示したいと思います。

§2. お菓子を配る問題

式(1)が成り立つことに気づくきっかけとなった問題は，課外講習で高等看護学校入試対策用のテキストを作成しているときに出会った「お菓子を配る問題」です。

> 異なる 4 個のお菓子 a，b，c，d を 3 人に分けるとき，お菓子をもらわない人がいないように分ける場合の分け方は何通りあるか求めよ。

この問題を，順列・組合せと積の法則で解いてみます。

お菓子を 2 個，1 個，1 個の 3 つの組に分けるときの分け方は，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{1!2!}$ 通り。この分け方に対して，3 つの組に分けられたお菓子を 3 人に配るときの配り方は 3! 通り。よって，積の法則により，

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{1!2!}\times3!=36$ 通りです。

一方，重複順列の考え方を用いても解くことができます。お菓子 a，b，c，d の配り方は 1 個のお菓子あたり 3 通りの配り方があることから，積の法則により 3^4 通りあります。しかし，これではお菓子をもらわない人がいる配り方も含んでいます。そこで，1 人または 2 人にのみお菓子を配るときの配り方の総数を引く必要があります。どの 2 人にお菓子を配るかを選ぶときの選び方は，${}_3\mathrm{C}_2$ 通り。その選んだ 2 人にお菓子を配るときの配り方は，選んだ 2 人のうち 1 人にのみお菓子を配るときの配り方の総数を引くことにより，$2^4-(1^4+1^4)$ 通り。積の法則より，${}_3\mathrm{C}_2\{2^4-(1^4+1^4)\}$ 通りとなります。また，1 人だけにお菓子を配るときの配り方は，${}_3\mathrm{C}_1\cdot1^4$ 通りです。

したがって，

$$\begin{aligned}&3^4-\{{}_3\mathrm{C}_2\{2^4-(1^4+1^4)\}+{}_3\mathrm{C}_1\cdot1^4\}\\&={}_3\mathrm{C}_3\cdot3^4-{}_3\mathrm{C}_2\cdot2^4+{}_3\mathrm{C}_1\cdot1^4=36\ (\text{通り})\end{aligned}$$

となります。(式(1)に似せるために，少々わざとらしい変形になっています。)

以上の 2 つの解き方を結びつけると，以下の等式が成り立ちます。

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{2!}\times3!=3^4-{}_3\mathrm{C}_2\cdot2^4+{}_3\mathrm{C}_1\cdot1^4 \qquad (2)$$

次に，「お菓子を配る問題」の自明な問題を考えてみます。

> 異なる 3 個のお菓子 a，b，c を 3 人に分けるとき，お菓子をもらわない人がいないように分ける

場合の分け方は何通りあるか求めよ。

この分け方は，a, b, c の順列を考え，$3!=6$ 通りです。

一方，回りくどい計算ですが，前の例と同様に重複順列の考え方を使って表せば，

$$3^3-{}_3C_2\cdot 2^3+{}_3C_1\cdot 1^3=27-24+3=6 \text{ (通り)}$$

となり，次の等式が成り立ちます。

$$ {}_3C_3\cdot 3^3-{}_3C_2\cdot 2^3+{}_3C_1\cdot 1^3=3! \qquad (3)$$

この等式は，式(1)において，$n=3$ としたものであることがわかります。

よって，式(1)の左辺の和は **n 個の異なるモノを n 人に1個ずつ分けるときの分け方の総数を重複順列の考え方を使って求めた計算式である**ということが予想できます。

§3. 組み分けの総数の公式

前節の考察から得られた等式(2), (3)を参考に一般化した式を導きます。

そのために，前節のお菓子の分配の問題を組み分けの問題として言い換えることにします。

【命題1】 異なる m 個のモノを名前のついた n 個の組に分けるときの分け方の総数を N_n^m で表す。ただし，各組には1個以上のモノが分けられるものとする。

このとき

$$N_n^m=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^m \qquad (4)$$

が成り立つ。特に，$N_n^n=n!$ であるから，

$$n!=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^n \qquad (5)$$

が成り立つ。

(証明) 最初は，モノを組み分けするときに，モノが分けられていない組が一組以上ある分け方も含めて組み分けの総数を考え，そこから，除外する分け方の総数を引くという考え方で証明する。

n 個の組に1から n まで番号をふる。以下，i 番目の組を i 組という。また，m 個のモノを名前のついた n 個の組に分けるとき，k 組にモノを分けないような分け方全体の集合を A_k で表す。(ここで，A_k は k 組にのみモノが分けられていない場合の分け方の集合ではないことに注意しておく。) このように A_k を表すと，例えば，3組と4組にモノを分けないような分け方全体の集合を，$A_3\cap A_4$ で表すことができる。よって，分け方の総数 $N(A_3\cap A_4)$ は残りの $n-2$ 個の組に m 個のモノを分ける場合を考えて $(n-2)^m$ 通りとなる。すなわち，

$$N(A_3\cap A_4)=(n-2)^m$$

同様に，i_1 組，i_2 組，…，i_k 組の k 個の組にモノを分けないような分け方の総数

$N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})$ は

$$N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=(n-k)^m$$

である。

N_n^m は，モノが分けられない組が存在する場合も含めた分け方 n^m から，一組以上の組にモノが分けられない分け方の総数，すなわち，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ の要素の個数を引いたものに等しい。

よって，

$$\begin{aligned}N_n^m&=n^m-N(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\&=n^m-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,n\}\\ i_1<i_2<\cdots<i_k}}N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})\\&=n^m-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}{}_nC_k(n-k)^m\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^m\end{aligned}$$

を得る。

ここで，集合の要素の個数に関する公式を用いた。上の式の2段目の $\sum$ の記号の下の $\substack{\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,n\}\\ i_1<i_2<\cdots<i_k}$ は，1から n までの自然数の集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の空集合を除くすべての部分集合 $\{i_1, i_2, \cdots i_k\}$ について和をとることを意味する。(例えば，参考文献〔2〕,〔3〕を参照)。

また，n 個のモノを名前のついた n 個の組に分けるとき，分け方の総数は，n 個のモノを一列に並べる順列の総数に等しいから，$N_n^n=n!$ である。

したがって，

$$n!=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^n$$

も成り立つ。■

【命題2】

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^m=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_nC_k k^m$$

が成り立つ。

(証明) $l=n-k$ とおけば，明らかである。■

この命題において，$m=n$ とおけば，式(1)と式(5)

は若干違って見えますが，まったく同値な式であることがわかります。

【命題 3】 $m<n$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^m=0$$

が成り立つ。

(証明) $m<n$ のときは，n 個の組に分けることはできない。ゆえに，$N_n^m=0$。よって，命題 1 と命題 2 から明らかに成り立つ。 ■

この公式は，数研通信 No.59 の補題と同値になります。

§4. 二重数列 $\{N_n^m\}_{m\geq1,\,n\geq1}$ に関する考察

今回導いた N_n^m は n と m に関する二重数列 $\{N_n^m\}_{m\geq1,\,n\geq1}$ になることがわかります。この節では，二重数列 $\{N_n^m\}$ に関して得られるいくつかの命題を解説します。

【命題 4】 N_n^m は $n!$ の倍数である。

(証明) m 個のモノを名前のついていない n 個の組に分けるとき，分け方の総数は，N_n^m を $n!$ で割ることによって得られる。 ■

以降，N_n^{n+1}，N_n^{n+2}，… を計算していきます。

【命題 5】 N_n^{n+1} について，次が成り立つ。

$$N_n^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k{}^{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}n! \tag{6}$$

(証明) $n+1$ 個のモノを，2 個，$\overbrace{1\text{ 個},\ \cdots,\ 1\text{ 個}}^{(n-1)}$ の山に分けるときの分け方は，

$$\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_1\cdots{}_1\mathrm{C}_1}{1!(n-1)!}={}_{n+1}\mathrm{C}_2$$

通り。このようにして分けた n 個の山を，名前のついた n 個の組に分けるときの分け方は，$n!$ 通りあるから，積の法則により，

$$N_n^{n+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_2\times n!=\frac{n(n+1)}{2}n! \quad ■$$

この式は，(2)の一般化となっています。

ちなみに，N_n^{n+1} の計算の問題は，3 年生の数学演習の時間にチャレンジ課題として出題しました。(式(1)の話はしていません。純粋に組合せの問題として出題しました。) 生徒は，$(n+1)$ 個のモノから n 個選んで，n 個の組に一個ずつ配り，そのあと残りの 1 個を n 個の組のうちの一組に配ればよいからと考えて，${}_{n+1}\mathrm{P}_n\times n$ 通りと答える生徒もいました。これはよくある勘違いで，順列の考え方を使って計算する場合は，入れる順番が異なれば異なるものとして数えてしまうので，重複分を割るのを忘れています。今の場合は，モノが 2 個入っているのが，一組あるので，最初に入れたモノと後に入れたモノの順番が異なっても実際には同じ組み分けになっているので，${}_{n+1}\mathrm{P}_n\times n\div2!=\dfrac{n(n+1)}{2}n!$ とする必要があります。

【命題 6】 N_n^{n+2} について，次が成り立つ。

$$N_n^{n+2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^{n+2}=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)n! \tag{7}$$

(証明) $(n+2)$ 個のモノを配る前に，n 個のモノの山を次のようにして作る。

まず，$(n+2)$ 個のモノを 2 個，2 個，$\overbrace{1\text{ 個},\cdots,1\text{ 個}}^{(n-2)}$ の山に分けたあとで，その n 個の山を n 個の組に分けるときの分け方は，積の法則により，

$$\frac{{}_{n+2}\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-3}\mathrm{C}_1\cdots{}_1\mathrm{C}_1}{2!(n-2)!}\times n! =\frac{{}_{n+2}\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{C}_2}{2!}n!$$

通り。

また，$(n+2)$ 個のモノを 3 個，$\overbrace{1\text{ 個},\ \cdots,\ 1\text{ 個}}^{(n-1)}$ の山に分けたあとで，その n 個の山を n 個の組に分けるときの分け方は，積の法則により，

$$\frac{{}_{n+2}\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_1\cdots{}_1\mathrm{C}_1}{1!(n-1)!}\times n!={}_{n+2}\mathrm{C}_3 n!$$

以上により，和の法則を用いると，

$$N_n^{n+2}=\left(\frac{{}_{n+2}\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{C}_2}{2!}+{}_{n+2}\mathrm{C}_3\right)n! =\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)n! \quad ■$$

以上，N_n^{n+1}，N_n^{n+2} を計算しました。

N_n^{n+k} $(k=3,\ 4,\ 5\cdots)$ についても同様に計算することができますが，急激に複雑になっていきます。手計算は N_n^{n+3}，N_n^{n+4} まででギブアップです。N_n^{n+5} については，無料で使える数式処理ソフト

(wxMaxima ver 0.7.4) (http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page) の助けを借りて計算しました。

結果のみ示します。

【命題７】 N_n^{n+3}, N_n^{n+4}, N_n^{n+5} について次が成り立つ。

$$N_n^{n+3}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^{n+3}=\frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n+2)(n+3)n! \tag{8}$$

$$N_n^{n+4}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^{n+4}=\frac{1}{5760}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\times(15n^3+30n^2+5n-2)n! \tag{9}$$

$$N_n^{n+5}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^{n+5}=\frac{1}{11520}n^2(n+1)^2(n+2)(n+3)(n+4)\times(n+5)(3n^2+7n-2)n! \tag{10}$$

【命題８】 二重数列 $\{N_n^m\}_{m\geqq1,\,n\geqq1}$ は，次の漸化式によって生成される。

$N_n^m=0$ $(m<n)$

$N_1^m=1$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$

$$N_n^m=n(N_n^{m-1}+N_{n-1}^{m-1})\ (m,\ n\geqq2) \tag{11}$$

（証明） $m<n$ のときは，n 個の組にモノを組み分けすることは不可能だから，$N_n^m=0$。

また，m 個のモノを一組に分ける方法は明らかに１通り。よって，$N_1^m=1$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$。以降，残りの３番目の漸化式を示す。

m 個のモノを M_1, M_2, $\cdots$, M_m とする。今，M_m を残して，M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1} のモノを名前のついた $(n-k)$ 個の組に分けたとする。$k\geqq2$ のときは，残りの M_m をまだ１個もモノが入っていない k 個の組に分けても，n 個の各組に１個以上のモノを入れることは不可能である。したがって，M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1} を組に分ける方法は，$(n-1)$ 個の組に分けるか，n 個の組に分けるかのいづれかの方法しかない。

以上により，m 個のモノ M_1, M_2, $\cdots$, M_m の分け方は，次の２つの分け方以外にはない。

A　$(m-1)$ 個のモノ M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1} を，名前のついた n 個の組に分けたあと，M_m を n 個の組の中の一組に分ける。

B　$(m-1)$ 個のモノ M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1} を，名前のついた $(n-1)$ 個の組に分けたあと，残りの一組に，M_m を分ける。

それぞれの分け方の総数は以下の通りである。

分け方 A の総数

$(m-1)$ 個のモノ M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1} を名前のついた n 個の組に分けるときの分け方は，N_n^{m-1} 通り。その分け方に対して，残り１個のモノ M_n の分け方は，n 個の組のうちの一組に分けるから n 通り。よって，積の法則により，$N_n^{m-1}\times n$ 通り。

分け方 B の総数

n 個の組から $(n-1)$ 個の組を選ぶときの選び方は，${}_n\mathrm{C}_{n-1}=n$ 通り。その選んだ $(n-1)$ 個の組に対して $(m-1)$ 個のモノ M_1, M_2, $\cdots$, M_{m-1} を分けるときの分け方は，N_{n-1}^{m-1} 通り。そのあと，残りの一組に M_m を分けるときの分け方は１通り。積の法則により，$n\times N_{n-1}^{m-1}\times1$ 通り。

以上により，和の法則から，

$N_n^m=n(N_n^{m-1}+N_{n-1}^{m-1})$　■

漸化式(11)により，式(4)を使わずとも次々に N_n^m の値を計算することが可能です。

§5. N_n^m の計算

これまでに導いた種々の公式を導くために，役に立ったのは，実際の数値計算です。式(4)を用いて，N_n^m を計算した結果は以下の通りです。

N_n^m $(n=1,\ \cdots,\ 5\ ;\ m=1,\ \cdots,\ 10)$ の値

m \ n	1	2	3	4	5
1	$\boxed{1}$	0	0	0	0
2	1	$\boxed{2}$	0	0	0
3	1	6	$\boxed{6}$	0	0
4	1	14	36	$\boxed{24}$	0
5	1	30	150	240	$\boxed{120}$
6	1	62	540	1560	1800
7	1	$\boxed{\boxed{126}}$	$\boxed{\boxed{1806}}$	8400	16800
8	1	254	$\boxed{\boxed{5796}}$	40824	126000
9	1	510	18150	186480	834120
10	1	1022	55980	818520	5103000

上の表の□で囲んである値１，２，６，24，120 は，$N_n^n=n!$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ の値です。また，$\boxed{\boxed{}}$ で囲んである値，$N_2^7=126$，$N_3^7=1806$，$N_3^8=5796$

の値をみると，$N_3^3=3\times(N_3^2+N_2^2)$ であることから，漸化式(11)を満たしていることがわかります。さらに，式(6)，(7)，(8)，(9)，(10)についても，成り立っていることがわかります。

§6. 完全順列との類似性について

式(4)は，包除の原理から導かれる和集合の要素の個数の公式，

$$N(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}$$
$$\times\sum_{\substack{\{i_1,\,i_2,\,\cdots,\,i_k\}\subset\{1,\,2,\,\cdots,\,n\}\\ i_1<i_2<\cdots<i_k}}N(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}) \quad (12)$$

を用いることによって計算しています。

式(4)を導いたとき，すぐに思い出したのは完全順列の総数の計算でした。完全順列とは，どの k 番目の数も k でないような1から n までの n 個の自然数の順列で，この順列の総数の計算も公式(12)を用います。(〔2〕を参照)

完全順列の問題では，1から n までの順列の総数の中で，k 番目の数が k であるような順列を<u>除いて</u>考えています。一方，組み分けの問題でも，組み分けの中で，モノが入っていない組が一組以上ある分け方を<u>除いて</u>考えています。このような考え方から自然に和集合の要素の個数の公式が適用され，完全順列や組み分けの総数が導かれたわけです。

完全順列との類似性は，漸化式にもあてはまります。1から n までの自然数を用いた完全順列の総数を a_n とすると，この数列 $\{a_n\}$ に成り立つ3項間漸化式は，

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+1}=n(a_n+a_{n-1})$$

で与えられます。

命題7の漸化式(11)と同じ形をしていることがわかると思います。

§7. 終わりに

以上，組み分けの問題の考察をきっかけに，数研通信 No. 59 の公式や，二重数列 $\{N_n^m\}$ の性質，完全順列との類似性について考えてきました。

公式(12)を用いて計算できる順列・組合せの問題は他にもありそうです。そして，その問題にも同じような漸化式が潜んでいるのではないかと考えています。

今後は，課外講習や授業の教材研究を通して，偶然出会う問題に期待しながら，暇をみては考察を深めていきたいと思っています。

ご意見・ご感想いただければ幸いです。

《参考文献》

〔1〕 松村文人　$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$ をご存知でしたか？　数研通信 No. 59　数研出版
〔2〕 松岡学　完全順列の解法と集合の個数公式　数研通信 No. 43　数研出版
〔3〕 渡辺了悟　${}_n\mathrm{C}_r$ についての1つの考察　数研通信 No. 52　数研出版
〔4〕 北海道・東北の看護学校入試問題解答 2007 年度用 p.189　教育弘報研究所

(宮城県利府高等学校)