―数研通信 59 号を読んで (1)―

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$ の直接的な証明 (1)

…集合の分割を利用…

…包含排除の原理を利用…

坂本（さかもと） 茂（しげる）

松本（まつもと） 且久（かつひさ）

渡部（わたなべ） 毅（たけし）

■集合の分割を利用 (坂本茂先生)

数研通信 (数学) No.59 *pp*.8-9 に掲載された，兵庫県親和女子高等学校の松村文人先生によって書かれた原稿

『$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$ をご存じでしたか？』

を拝読しました。

最後の「§6. 終わりに」において，「もっと直接的な証明があれば，ご教示願いたいと思う今日この頃なのです。」とありましたので，これに関した文献を紹介します。それは

数学セミナー 2006 年 4 月号 vol.45 no.4/535

(第 45 巻 4 号通巻 535 号) 日本評論社

に掲載された特集で

江川嘉美　著「場合の数と漸化式・多項式」*pp*.32-35

であります。そのなかで，有限集合Aに属する要素の個数をnとし，Aを $1\leqq k\leqq n$ であるk個の空でない部分集合に順番は考慮せず，分割する方法の総数を $S_k^{(n)}$ で表すとき

$$S_k^{(n)}=\frac{1}{k!}\sum_{t=1}^{k}(-1)^{k-t}{}_k\mathrm{C}_t t^n$$

が直接的に証明されています。この式において $k=n$ とすれば，$S_n^{(n)}=1$ であるので，数研通信 No.59 *pp*.8-9 に掲載された $n!$ の式が得られます。したがって，この証明を参考にして $k=n$ で行えば直接的証明も簡単に書けると思います。

(東京都立東大和南高等学校)

■包含排除の原理を利用 (松本且久先生)

今回の数研通信 59 号で，松村先生が投稿されておられました差分方程式に関する興味ある式の，高校生にでも分かる解法についてのご希望を書かれてありましたので，先生にお知らせ願うべく筆をとりました。

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$　…① の証明

証明したい式の左辺は，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k\cdot k^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}{}_n\mathrm{C}_k\cdot k^n$$

であるから，①は

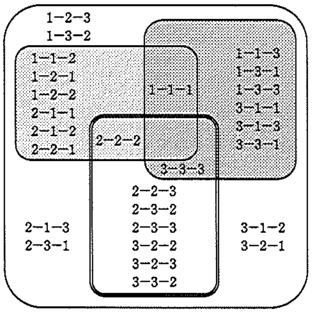
$$\begin{aligned}&{}_n\mathrm{C}_n\cdot n^n-{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot(n-1)^n+{}_n\mathrm{C}_{n-2}\cdot(n-2)^n\\&\qquad-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_1\cdot 1^n=n!\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

と同値である。これは，包含排除の式そのものである。つまり，異なるn個の対象 1, 2, 3, ……, n を考えて，それらから長さnの重複順列を考えれば，その総数は n^n である。この中には，1, 2, 3, ……, n のすべてを使って作った $n!$ 個の順列が含まれており，それらを包含排除の原理で次のように取り出せばよい。

まず，1, 2, 3, ……, n のうちの $(n-1)$ 個から作られた重複順列の総数 ${}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot(n-1)^n$ を引き去ると，$(n-2)$ 個から作られた重複順列を引きすぎている。ゆえに，今度は ${}_n\mathrm{C}_{n-2}\cdot(n-2)^n$ を勘定の中に戻す必要がある。そうすると，$(n-3)$ 個から作られた重複順列を足しすぎているので，それを除いて…というようにして，包含・排除を繰り返すと②を得る。

（付記）①は第２種スターリング数 $S_{n,r}$ に関する式 $k^n=\sum_{r=0}^{k}{}_kC_r r!S_{n,r}$ の言い替え（反転と $S_{n,n}=1$ からの）なのですが，この①だけで十分鑑賞に値すると思います。

（例）$n=3$ のとき $3^3-{}_3C_2\cdot 2^3+{}_3C_1\cdot 1^3=6=3!$



（愛媛県　愛光高等学校）

■包含排除の原理を利用（渡部毅先生）

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^n=n!$ を直接証明することを考える。この両辺を入れ換えて

$$n!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^n$$

を組合せ論的な考え方で示す。

まず右辺について，制限が無ければ異なる n 個のものを異なる n 個の箱に入れる方法は重複順列により n^n 通りある。その中で１箱が空である場合の数を S_1 とすると，空である１箱の選び方は ${}_nC_1$ 通りであり，残りの $n-1$ 箱の中に異なる n 個のものの入れ方は $(n-1)^n$ 通りあるから

$$S_1={}_nC_1(n-1)^n \text{（通り）}$$

さらに，１箱が空である場合の中には，２箱が空である場合が含まれている。その場合の数を S_2 とすると，空である２箱の選び方は ${}_nC_2$ 通りであり，残りの $n-2$ 箱の中に異なる n 個のものの入れ方は $(n-2)^n$ 通りあるから

$$S_2={}_nC_2(n-2)^n \text{（通り）}$$

以下同様にして，一般に n 個の箱の中で，k 箱 $(1\leqq k\leqq n-1)$ が空である場合の数を S_k とする。空である k 個の箱の選び方 ${}_nC_k$ 通りの各々に対して，残りの $n-k$ 個の箱に n 個の異なるものを入れる方法は $(n-k)^n$ 通りあるから，

$$S_k={}_nC_k(n-k)^n \text{（通り）}$$

ゆえに

$$n^n-{}_nC_1(n-1)^n+{}_nC_2(n-2)^n-\cdots\cdots+(-1)^k{}_nC_k(n-k)^n+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_nC_{n-1}$$

次に，左辺について異なる n 個のものを異なる n 個の箱に入れるのに，どの１つも空でないように入れるならば，それは $n!$ 通りあるから

$$n!=n^n-{}_nC_1(n-1)^n+{}_nC_2(n-2)^n-\cdots\cdots+(-1)^k{}_nC_k(n-k)^n+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_nC_{n-1}$$

したがって　$n!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k(n-k)^n$

これを厳密かつ論理的に裏付けるためには，包除原理（正しくは包含排除の原理）と呼ばれる次の原理による。それはまず，２つの集合 A，B の要素の個数に関して次の等式が成り立つ。

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$$

また，３つの集合 A，B，C に関しては次の等式が成り立つ。

$$N(A\cup B\cup C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(A\cap B)-N(B\cap C)-N(C\cap A)+N(A\cap B\cap C)$$

それでは，一般の n 個の集合に関してはどうであろうか。それに関しては，次の等式が成り立つ。

$$N(A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n)=S_1-S_2+S_3-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}S_r+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}S_n$$

実際，応用上は n 個の集合 A_1，A_2，……，A_n をすべて含む全体集合を U として，次の式で表される。

$$N(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cdots\cap\overline{A_n})=N(U)-S_1+S_2-S_3+\cdots\cdots+(-1)^rS_r+\cdots\cdots+(-1)^nS_n$$

ここで，S_i は $1\leqq\nu_1<\nu_2<\cdots\cdots<\nu_i\leqq n$ を満たす i 個の自然数の組 $(\nu_1,\ \nu_2\cdots\cdots,\ \nu_i)$ についての $N(A_{\nu_1}\cap A_{\nu_2}\cap\cdots\cdots\cap A_{\nu_i})$ の総和，すなわち

$$S_i=\sum_{1\leqq\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_i\leqq n}N(A_{\nu_1}\cap A_{\nu_2}\cap\cdots\cdots\cap A_{\nu_i})$$

を表すものとする。

（東京都立駒場高等学校）