正弦定理と余弦定理の同値性

河合（かわい）　進輔（しんすけ）

§0. はじめに

第１余弦定理と第２余弦定理が同値であることの証明はよく見かけるが，これらと正弦定理の３つが同値であることをまとめて証明されているものをあまり見かけないので，まとめてみた。

§1. まず，定理を列挙する

正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}(=2R)$　…①

第１余弦定理
$$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B & \cdots② \\ b=c\cos A+a\cos C & \cdots③ \\ c=a\cos B+b\cos A & \cdots④ \end{cases}$$

第２余弦定理
$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A & \cdots⑤ \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B & \cdots⑥ \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C & \cdots⑦ \end{cases}$$

§2. (第１余弦定理)⇒(第２余弦定理) の証明

②×a から　$a^2=ba\cos C+ca\cos B$

③から　$a\cos C=b-c\cos A$

④から　$a\cos B=c-b\cos A$

下の２式を最初の式に代入して

$$a^2=b(b-c\cos A)+c(c-b\cos A)$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A$$

よって，⑤が成り立つ。

同様に，②，③，④から⑥，⑦が導ける。

§3. (第２余弦定理)⇒(第１余弦定理) の証明

⑦から　$b\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

⑥から　$c\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$

これらの２式を加えて

$$b\cos C+c\cos B=\frac{2a^2}{2a}=a$$

よって，②が成り立つ。

同様にして，⑤，⑥，⑦から③，④が証明できる。

§4. (正弦定理)⇒(第１余弦定理) の証明

①から　$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$，$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$

よって

$$b\cos C+c\cos B=\frac{a(\sin B\cos C+\cos B\sin C)}{\sin A}$$
$$=\frac{a\sin(B+C)}{\sin A}$$
$$=\frac{a\sin(180^\circ-A)}{\sin A}$$
$$=a$$

よって，②が成り立つ。

同様にして，①から③，④が証明できる。

§5. (第１余弦定理)⇒(正弦定理) の証明

②，③に④を代入して c を消去すると

$$a=b\cos C+(a\cos B+b\cos A)\cos B$$
$$b=(a\cos B+b\cos A)\cos A+a\cos C$$

これらを変形して

$$a(1-\cos^2 B)=b(\cos C+\cos A\cos B)$$
$$b(1-\cos^2 A)=a(\cos B\cos A+\cos C)$$

更に変形して

$$a^2\sin^2 B=ab(\cos A\cos B+\cos C)$$
$$b^2\sin^2 A=ab(\cos A\cos B+\cos C)$$

よって　$\dfrac{a^2}{\sin^2 A}=\dfrac{b^2}{\sin^2 B}$

$\dfrac{a}{\sin A}>0$，$\dfrac{b}{\sin B}>0$　から　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

同様に，　$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

以上から，正弦定理の $=2R$ を除いて３つの定理は同値である。

（兵庫県　須磨学園高等学校）