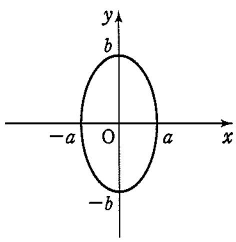
電卓を用いて数値計算を楽しむ

―月探査機かぐやの話題から―

君島(きみじま)　巖(いわお)

数学というと，ともすれば定理を証明したり，大学入試問題を解いたり等限定的になりがちです。今回は今話題の かぐや にヒントを得て，初歩的な物理の知識と電卓を駆使し，計算そのものを楽しみたいと思います。

【例題１】 地球の形は回転楕円体である。赤道半径の方が極半径よりも大きい扁平楕円体である。赤道半径を 6378.160 km，極半径を 6356.775 km とするとき地球の体積を求めよ。



今楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を，x 軸の周りに回転してできる楕円体の体積を V とする。

$$V=2\pi\int_0^a y^2dx$$

$$=2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

ここで

$a=6356.775$

$b=6378.160$

$\pi=3.141592$

を代入して電卓で計算すると

$V=1.0832186\times10^{12}$ km^3

を得る。

【例題２】 地球を球とみなし，その半径を R とするとき，R を求めよ。

例題１を用いて

$\dfrac{4}{3}\pi ab^2=\dfrac{4}{3}\pi R^3$ から

$$R^3=ab^2$$
$$=6356.775\times6378.16^2$$
$$=258.59948\times10^9$$

これの常用対数をとると

$\log R=3.8042$

これより

$R=6371.5$ km

が得られる。

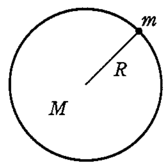
【例題３】 地球上の重力加速度 α を求めよ。ただし

地球の半径 $R=6371$ km

地球の密度$=5.5$ g/cm^3

万有引力定数 $G=6.72\times10^{-8}$ cm^3/g·sec^2

とする。



人の質量 m

地球の質量 M

地球上の重力加速度 α

人が受ける力 F

万有引力の法則から

$$F=G\frac{mM}{R^2} \quad\cdots\cdots①$$

$$F=m\alpha \quad\cdots\cdots②$$

$$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho \quad\cdots\cdots③$$

ρ：地球の密度

①，②，③から

$$\alpha=\frac{4}{3}G\pi R\rho$$

$$=\frac{4}{3}\times 6.72\times 10^{-8}\times 3.141592\times 6371\times 10^5\times 5.5$$

$$=986.34321\ \mathrm{cm/sec^2}$$

> **【例題 4】** 月面上の重力加速度 α' を求めよ。ただし，
> 　月の半径 $R'=1738$ km
> 　月の密度 $\rho'=3.35$ g/cm^3
> とする。

月面上の重力加速度

$$\alpha'=\frac{4}{3}G\pi R'\rho' \qquad \text{(例題 3 により)}$$

$$=\frac{4}{3}\times 6.72\times 10^{-8}\times 3.141592\times 1.738\times 10^8\times 3.35$$

$$=163.88995\ \mathrm{cm/sec^2}$$

$$\alpha'=164\ \mathrm{cm/sec^2}$$

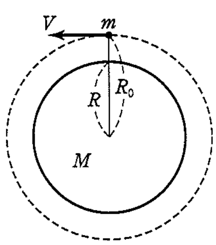
なお地球上と月面上の重力比は

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{163.88995}{986.34321}$$

$$=0.1661591$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{6}$$

> **【例題 5】** かぐやは月の上空 100 km をまわる。かぐやの周期を求めよ。ただし，かぐやは円軌道と見なす。



m：かぐやの質量

M：月の質量

R：月の半径

　$R=1738$ km

R_0：かぐやの回転半径

　$R_0=1738+100$

　　$=1838$ km

ρ：月の密度 $\rho=3.35$ g/cm^2

V：かぐやの回転速度

人工衛星かぐやにかかる引力 $G\frac{mM}{R_0{}^2}$ と遠心力 $m\frac{V^2}{R_0}$ はつり合う。

$$G\frac{mM}{R_0{}^2}=m\frac{V^2}{R_0}$$

これにより

$$V=\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

$$R_0=1838\ \mathrm{km}=1.838\times 10^8\ \mathrm{cm}$$

$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ から

$$\frac{GM}{R_0}=\frac{6.72\times 10^{-8}\times\frac{4}{3}\pi\times(1.738\times 10^8)^3\times 3.35}{1.838\times 10^8}$$

$$=2.6934342\times 10^{10}$$

$$\therefore\quad V=\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

$$=1.6411685\ \mathrm{km/sec}$$

さて月の円軌道の道のり

$$l=2\pi R_0$$

$$\therefore\quad t=\frac{l}{V}$$

$$=\frac{2\times 3.141592\times 1838}{1.6411685}$$

$$=7036.7509\ \text{秒}$$

$$\fallingdotseq 1\ \text{時間}\ 57\ \text{分}$$

おわりに

今回の月探査機かぐやからみた地球の出入りのハイビジョン映像は全く素晴らしかった。後日，NHKで特集番組があり，月面上での加速度が地球上の $\frac{1}{6}$，また月面から 100 km 上空をまわるかぐやが約 2 時間で月を一周するという。これを自分なりに計算してみようと電卓で計算したら，比較的早く結果が出て狂喜した。これ以来月が身近に感じられるようになった。複雑そうな数値計算も電卓なら素早く出来ます。

《参考文献》

〔1〕 天文の計算教室　斉田博著　地人書館

（栃木県　矢板中央高等学校）