—数研通信 59 号を読んで (4)—

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$ の直接的な証明 (2)

…微分を利用…

片岡（かたおか）　宏信（ひろのぶ）

二項定理により

$$(e^x-1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{kx}(-1)^{n-k} \qquad (1)$$

が成り立つ。(1)を x で微分すると，

$$n(e^x-1)^{n-1}e^x=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{kx}(-1)^{n-k}k \qquad (2)$$

となる。(1)を 2 階微分すると，

$$n(n-1)(e^x-1)^{n-2}e^{2x}+n(e^x-1)^{n-1}e^x$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{kx}(-1)^{n-k}k^2$$

である。このように，(1)を n 階微分する。

(1)を x で $i(<n)$ 階微分するためには，(2)を x で $i-1$ 階微分すればよい。(2)の左辺を $i-1$ 階微分すると，

$$n\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}(e^x-1)^{n-1}e^x$$
$$=\sum_{r=0}^{i-1}a_r^{(i-1)}n(n-1)\cdots\cdots(n-r)(e^x-1)^{n-r-1}e^{(r+1)x}$$

ここで $a_r^{(i-1)}$ は $a_0^{(i-1)}=a_{i-1}^{(i-1)}=1$ で

漸化式　　$a_r^{(i-1)}=a_{i-1}^{(i-2)}+(r+1)a_r^{(i-2)}$

で決まる整数である。

一方，右辺の式を $i-1$ 階微分すると，

$$\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{kx}(-1)^{n-k}k=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{kx}(-1)^{n-k}k^i$$

となる。したがって，

$$\sum_{r=0}^{i-1}a_r^{(i-1)}n(n-1)\cdots\cdots(n-r)(e^x-1)^{n-r-1}e^{(r+1)x}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{kx}(-1)^{n-k}k^i$$

が成り立つ。この式において $x=0$ とおくと，

$$0=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^{n-k}k^i$$

したがって，$0=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^{n+k}k^i$

となる。この式は，補題として示された式である。

さらに，(1)を x で n 階微分すると，すなわち(2)を x で $n-1$ 階微分すると，左辺の式は

$$n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^x-1)^{n-1}e^x$$
$$=\sum_{r=0}^{n-1}a_r^{(n-1)}n(n-1)\cdots\cdots(n-r)(e^x-1)^{n-r-1}e^{(r+1)x}$$
$$=n!\,e^x+\sum_{r=0}^{n-2}a_r^{(n-1)}n(n-1)\cdots\cdots(n-r)(e^x-1)^{n-r-1}e^{(r+1)x}$$

一方，右辺の式は

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{kx}(-1)^{n-k}k$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{kx}(-1)^{n-k}k^n$$

となる。したがって，

$$n!\,e^x+\sum_{r=0}^{n-2}a_r^{(n-1)}n(n-1)\cdots\cdots(n-r)(e^x-1)^{n-r-1}e^x$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k e^{kx}(-1)^{n-k}k^n$$

が成り立つ。この式において $x=0$ とおくと，

$$n!=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^{n-k}k^n$$

したがって，$n!=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^{n+k}k^n$

が成り立つ。これで問題の式が導けた。

(兵庫県立大学附属高等学校)