$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の標準形と A^n について

衣笠（きぬがさ）　泰弘（やすひろ）

§0. はじめに

行列Aについて，A^nの計算の仕方をタイプ別に分けてまとめた。理論的な裏付けは線形代数の専門書に任せることにして，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a，b，c，d は実数) について，すべてのパターンの計算方法をまとめたので紹介する。

その固有方程式は

$t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0$ ……Ⓣ

とする。

§1. Ⓣが異なる2実数解 α，β をもつとき

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ からそれぞれの固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を求める。

(これらは一次独立である　★★)

$A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \beta x_2 \\ \alpha y_1 & \beta y_2 \end{pmatrix}$ から

$A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

ゆえに $P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_1 \end{pmatrix}$ とおくと $AP=P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

ゆえに $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

例　$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
固有方程式 $t^2-6t-7=0$ から　$t=-1$，7

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から

$\begin{cases} x+4y=-x \\ 3x+5y=-y \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix}$ (s は任意実数)

簡単な解として $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から

$\begin{cases} x+4y=7x \\ 3x+5y=7y \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} -6x+4y=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2s \\ 3s \end{pmatrix}$ (s は任意実数)

簡単な解として $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

よって $P=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおけば

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

両辺をn乗すれば

$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}$

よって $A^n=P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}P^{-1}$

$$A^n=\begin{pmatrix} \dfrac{7^n+3(-1)^n}{4} & \dfrac{7^n-(-1)^n}{2} \\ \dfrac{3\cdot 7^n-3(-1)^n}{8} & \dfrac{3\cdot 7^n+(-1)^n}{4} \end{pmatrix}$$

§2. Ⓣが異なる2虚数解 (当然　共役) α，$\overline{\alpha}$ をもつとき

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\overline{\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

からそれぞれの固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を求める。

(これらは一次独立である　★★)

今これらを $\overrightarrow{p_1}$，$\overrightarrow{p_2}$ とおく。

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$\overline{\alpha}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$ であるから

$A\overrightarrow{p_1}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\overrightarrow{p_1}$ ……①

$A\overrightarrow{p_2}=r(\cos\theta-i\sin\theta)\overrightarrow{p_2}$ ……②

①＋②から

$A(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2})$

$=r\cos\theta(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2})+r\sin\theta(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2})i$ ……③

①－②に i を掛けて

$Ai(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2})$

$=-r\sin\theta(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2})+r\cos\theta(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2})i$ ……④

$\overrightarrow{q_1}=\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{q_2}=i(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2})$ とおくと，③，④は

$A\overrightarrow{q_1}=r\cos\theta\overrightarrow{q_1}+r\sin\theta\overrightarrow{q_2}$

$A\overrightarrow{q_2}=-r\sin\theta\overrightarrow{q_1}+r\cos\theta\overrightarrow{q_2}$

よって　$A(\overrightarrow{q_1}\ \ \overrightarrow{q_2})=r(\overrightarrow{q_1}\ \ \overrightarrow{q_2})\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

ここで $P=(\overrightarrow{q_1}\ \ \overrightarrow{q_2})$ とおけば

$AP=rP\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

よって $P^{-1}AP=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ となる。

> 例　$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$
>
> 固有方程式 $t^2-2t+4=0$ から $t=1\pm\sqrt{3}\,i$

$t=2(\cos\theta\pm i\sin\theta)$ とおくと $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(1+\sqrt{3}\,i)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ から $x=-\sqrt{3}\,iy$

$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\,is\\ s\end{pmatrix}$ （s は任意実数)

簡単な解として $\overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\,i\\ 1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(1-\sqrt{3}\,i)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ から $x=\sqrt{3}\,iy$

$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\,is\\ s\end{pmatrix}$ （s は任意実数)

簡単な解として $\overrightarrow{p_2}=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\,i\\ 1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{q_1}=\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{q_2}=i(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2})=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$

よって $P=\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{3}\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ とおけば

$$P^{-1}AP=2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$$

両辺を n 乗すれば

$$P^{-1}A^nP=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3}\\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}$$

よって $A^n=2^nP\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3}\\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}P^{-1}$

以下　計算略

§3. ⑦が重解 α をもつとき

（I） $\mathrm{rank}(A-\alpha E)=0$ のとき

$\ker(A-\alpha E)$ の次元は 2 から§1と同様にして一次独立な固有ベクトルが 2 つとれて

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ ……② とできる。

しかし　このとき，②から

$A=P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$

となり，A は最初から $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ である。

もちろん $A^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ である。

(II) $\mathrm{rank}(A-\alpha E)=1$ のとき

$\ker(A-\alpha E)$ の次元は 1 であるから固有値 α に対する一次独立な固有ベクトルは 1 つである。

$A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ から固有ベクトル $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ を求め，

$A\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \alpha y_1\end{pmatrix}$ ……①

さらに $(A-\alpha E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ を解いて $\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$ を求める。

$A\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha x_2\\ \alpha y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+\alpha x_2\\ y_1+\alpha y_2\end{pmatrix}$ ……②

から①，②により

$A\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1 & x_1+\alpha x_2\\ \alpha y_1 & y_1+\alpha y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$

ここで $P=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$ とおくと

$AP=P\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ とでき，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ が得られる。　　（ジョルダンの標準形　★★）

例　$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

固有方程式 $t^2-4t+4=0$ から $t=2$ (重解)

重解 $t=2$ の固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

を解いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\s\end{pmatrix}\quad (s\text{ は任意})$$

簡単な解 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ をとる。

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots①$$

$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ の解として $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

をとる。すなわち

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots②$$

①，②から

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$$

ゆえに $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$

ここで $N=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ とおけば

$P^{-1}AP=2E+N$ で $N^k=O$ $(k\geqq 2)$

からこれを n 乗すれば

$$P^{-1}A^nP=2^nE+{}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1}N$$

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\0 & 2^n\end{pmatrix}$$

これより

$$A^n=P\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\0 & 2^n\end{pmatrix}P^{-1}\quad\text{(以下計算略)}$$

(注)　★★部分は線形代数の専門書を参考にしてください。

(兵庫県　滝川高等学校)