3点を通る放物線の方程式の求め方
―係数決定―

河合(かわい)　進輔(しんすけ)

§0. はじめに

3点を通る曲線を放物線で近似する場合，求める放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおいて，a，b，c の連立方程式を解くのが一般的であるが，連立方程式を解きやすくするためにニュートンの補間法と呼ばれる次のような技法がある。ラグランジェの補間法や差分法（x 座標が連続する整数の場合）を利用するより簡単である。

§1. 3点を通る放物線

3点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ を通る放物線の場合，求める方程式を

$$y=a_0+a_1(x-x_1)+a_2(x-x_1)(x-x_2) \quad \cdots\cdots①$$

とおいて，3点の座標を代入して，係数 a_0，a_1，a_2 を求める。これは，

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2 \quad \cdots\cdots②$$

とおいて解くのと同じことである。このことは次のように示される。

$$a_0+a_1(x-x_1)+a_2(x-x_1)(x-x_2)$$
$$=b_0+b_1x+b_2x^2$$

が恒等式であるとすると係数を比較して，

$$\begin{cases} a_0-x_1a_1+x_1x_2a_2=b_0 \\ a_1-(x_1+x_2)a_2=b_1 \\ a_2=b_2 \end{cases}$$

これらを a_0，a_1，a_2 について解くと

$$\begin{cases} a_0=x_1\{(x_1+x_2)b_2+b_1\}-x_1x_2b_2+b_0 \\ a_1=(x_1+x_2)b_2+b_1 \\ a_2=b_2 \end{cases}$$

逆に，下の3式を b_0，b_1，b_2 について解くと上の3式が得られる。したがって，求める方程式を②のようにおき，b_0，b_1，b_2 を求めて，下の3式から a_0，a_1，a_2 を定めると①の形になるので，最初から①の形において解いても同じことである。

§2. 実際の計算例

【問題1】 2次関数のグラフが，3点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ -4)$ を通るとき，その2次関数を求めよ。

解答　求める2次関数を

$y=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)(x-2)$ とおくと

$(-1,\ 0)$ を通るので，　$a_0=0$

$(2,\ 3)$ を通るので，　$3a_1=3$，$a_1=1$

$(3,\ -4)$ を通るので，$4+4a_2=-4$，$a_2=-2$

よって，求める2次関数は，

$$y=(x+1)-2(x+1)(x-2)$$

すなわち，$y=-2x^2+3x+5$

文字ばかりの式でも次のように計算できる。

【問題2】 p，q は自然数とする。

(1)　実数 x に対して実数 $y=f(x)$ を定める関数 $f(x)$ が，任意の実数 x に対して

$$f(x)-2f(x+1)+f(x+2)>0 \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たせば，任意の実数 x に対して

$$f(x)-\frac{p+q}{q}f(x+p)+\frac{p}{q}f(x+p+q)>0$$

が成り立つことを示せ。

(2)　a，b，c を

$$a-\frac{p+q}{q}b+\frac{p}{q}c>0$$

を満たす定数とする。このとき，$f(0)=a$，$f(p)=b$，$f(p+q)=c$ でかつ任意の実数 x に対して $(*)$ を満たす2次関数 $f(x)$ を与えよ。

(3)　（略）

（2006年度名古屋大学後期の問題である）

解答　(1)　$(*)$ より

$$f(x+2)-f(x+1)>f(x+1)-f(x) \quad \cdots\cdots(**)$$

この式から，n を自然数として，

$$d_n=f(x+n+1)-f(x+n)$$

とすると，数列 $\{d_n\}$ は，単調増加数列であり，p，q は自然数だから，

$$\frac{1}{q}\sum_{k=p}^{p+q-1} d_k>\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} d_k$$

すなわち，

$$\frac{1}{q}\{f(x+p+q)-f(x+p)\}$$

$$>\frac{1}{p}\{f(x+p)-f(x)\}$$

よって，

$$f(x)-\frac{p+q}{q}f(x+p)+\frac{p}{q}f(x+p+q)>0$$

(2) 求める 2 次関数を

$$f(x)=a_0+a_1(x-p)+a_2(x-p)(x-p-q)$$

とおくと

$f(0)=a$ から $a_0-pa_1+p(p+q)a_2=a$

$f(p)=b$ から $a_0=b$

$f(p+q)=c$ から $a_0+qa_1=c$

これらを解いて

$$a_0=b,\quad a_1=\frac{-b+c}{q},$$

$$a_2=\frac{1}{p(p+q)}\left(a-\frac{p+q}{q}b+\frac{p}{q}c\right)$$

このとき条件より，$f''(x)=a_2>0$ となるので，$f'(x)$ は単調増加となり，$f(x)$ は（＊＊）すなわち（＊）を満たす。（$[x,\ x+1]$ の平均変化率から $[x+1,\ x+2]$ の平均変化率の方が大きい）

（後略）

§3. 背景

以上の計算法の背景には，差分や階乗関数の考えがある。ちょうど良い例が，1999年度信州大学後期試験と2000年度東京大学後期試験に出題された次の 2 題である。

信州大学の問題

> n を自然数とする。
>
> x の整式 $F_n(x)$ を
>
> $$F_n(x)=x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)$$
>
> とおく。
>
> x の整式 $A(x)$ が実数 a_0，a_1，……，a_n を用いて
>
> $$A(x)=a_nF_n(x)+a_{n-1}F_{n-1}(x)+\cdots\cdots+a_1F_1(x)+a_0$$
>
> とかけるとき，$A(x)$ は $F_i(x)(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ で表されるという。このとき，次の問いに答えよ。
>
> (1) $2x^2+x-3$ を $F_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ で表せ。
>
> (2) x^n が $F_i(x)$ $(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ で表されることを示せ。

(1)は前頁§1. で示した内容である。すなわち

$$2x^3+x-3=a_3F_3(x)+a_2F_2+a_1F_1(x)+a_0$$

とおき，$x=0,\ 1,\ 2,\ 3$ を代入して順次 a_0，a_1，a_2，a_3 を求めるとよい。

(2)は(1)と同様に

$$x^n=a_nF_n(x)+a_{n-1}F_{n-1}(x)+\cdots\cdots+a_1F_1(x)+a_0$$

とおき，$x=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入して順次 a_0，a_1，……，a_n が求まることを示せばよい。

ここで，$F_n(x)$ が階乗関数で $F_n(n)=n!$ である。

これを更に難しくしたのが次の問題である。

東京大学の問題

> k を正整数とし，x を変数とする k 次多項式 $P_k(x)$ について，次の条件
>
> $$\text{(C)}\quad \begin{cases} P_k(x)-P_k(x-1)=x^{k-1} \\ P_k(0)=0 \end{cases}$$
>
> を考える。ただし，$x^0=1$ と定める。
>
> このとき，次の問いに答えよ。
>
> (1) $k=1,\ 2$ に対し，$P_k(x)$ を求めよ。
>
> (2) すべての $k\geqq3$ に対し，条件(C)を満たす $P_k(x)$ が存在し，しかもただ 1 つであることを示せ。
>
> (3) 正整数 k に対し，k 次の多項式 $Q_k(x)$ を次の条件が成立するように定める。
>
> $$\begin{cases} Q_k(0)=Q_k(1)=\cdots\cdots=Q_k(k-1)=0 \\ Q_k(k)=1 \end{cases}$$
>
> このとき，k 個の整数 c_1，c_2，……，c_k がそれぞれただ 1 つ存在して，$P_k(x)=\sum_{j=1}^{k} c_jQ_j(x)$ と表されることを示せ。

(C)の第 1 式から $P_k(x)$ の第 1 差分が，

$P_k(x+1)-P_k(x)=(x+1)^{k-1}$ であるということであり，ちなみに，前頁問題 2 の（＊）の左辺は，$f(x)$ の第 2 差分

$$\{f(x+2)-f(x+1)\}-\{f(x+1)-f(x)\}$$

である。(3)の定義から

$$Q_k(x)=\frac{1}{k!}x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-k+1)$$

入試問題としてはかなりの重量であるが，このような背景を知っておけば，取り組みやすくなるのではないだろうか。東大入試には，続編があって(C)の第1式に，$x=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入して，辺々加えると，$P_k(n)=\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}$ となる。この和については，2006年度の東大後期試験の次の問題でも題材になっている。

> 数列の和の公式
>
> $$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1),$$
>
> $$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$
>
> $$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$
>
> などについて，次のような一般的な考察をしてみよう。p，n を自然数とする。
>
> (1)　$p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ があって，数列の和 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ が $S_p(n)$ と表されることを示せ。
>
> (2)　q を自然数とする。(1)の多項式 $S_1(x)$，$S_3(x)$，$\cdots\cdots$，$S_{2q-1}(x)$ に対して
>
> $$\sum_{j=1}^{q} a_j S_{2j-1}(x)=x^q(x+1)^q$$
>
> が恒等式となるような定数 a_1，$\cdots\cdots$，a_q を q を用いて表せ。
>
> (3)　q を2以上の自然数とする。(1)の多項式 $S_2(x)$，$S_4(x)$，$\cdots\cdots$，$S_{2q-2}(x)$ に対して，
>
> $$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x)=x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$$
>
> が恒等式となるような定数 c と b_1，$\cdots\cdots$，b_{q-1} を q を用いて表せ。
>
> (4)　略

大変な難題であるが，(1)から
$S_p(x)-S_p(x-1)=x^p$ であることがわかるので，それを利用する。前問と比較すると，$P_k(x)=S_{k-1}(x)$ ということになる。

§4. 最後に

東大の問題はかなりの難問であり，いい例ではないかもしれないが，初歩的な2次関数の係数決定から数列の和まで関連しており，更に先がある。いまの高等学校の数学は，系統的に学習しにくくなっているので，総合的な問題の演習が重要ではないかと思われる。

（大阪府　清風南海高等学校）