接線を利用した台形の面積で，ある不等式を証明する

柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

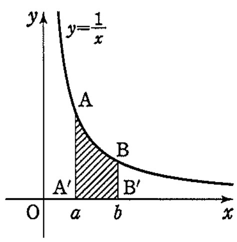
§0. はじめに

ある種の不等式は長方形の面積や台形の面積を考えても成り立つことが証明できる。次の例題１は台形の面積を考えても解ける問題である。

例題１　次の不等式が成り立つことを示せ。

$0<a<b$ のとき　$\log\frac{b}{a}<\frac{1}{2}(b-a)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

不等式の左辺は図の斜線部分，右辺は台形 AA′B′B の面積を表しており，$y=\frac{1}{x}$ は下に凸であるから，この不等式は成り立つ。



（図１）

ここでは接線を考えて，ある不等式を証明する。

§1. 接線利用の面積を用いたある不等式

定理１　関数 $f(x)$ は，常に $f''(x)<0$ を満たすものとする。

(1)　$a<c<b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)\left\{f'(c)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+f(c)\right\}$$

が成り立つ。

(2)　$a<b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

が成り立つ。

［証明］　(1)　まず $[a,\ b]$ で常に $f(x)>0$ ……$(*)$ を満たすときに成り立つことを示す。

$A'(a,\ 0)$，$B'(b,\ 0)$，$C(c,\ f(c))$

とおき，Cにおける $y=f(x)$ の接線を ℓ とする。

$\ell: y=f'(c)(x-c)+f(c)$

ここで，

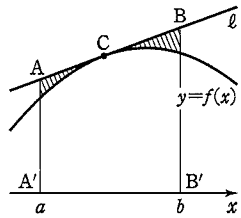
$A(a,\ f'(c)(a-c)+f(c))$,

$B(b,\ f'(c)(b-c)+f(c))$

とおくと，$y=f(x)$ は上に凸であるから

$\int_a^b f(x)\,dx<$（台形 AA′B′B の面積）

が成り立つ。



（図２）

上に凸であるから ℓ は $y=f(x)$ の上方にある。（Cでは一致）

（台形 AA′B′B の面積）

$$=\frac{1}{2}\{f'(c)(a-c)+f(c)+f'(c)(b-c)+f(c)\}\times(b-a)$$

$$=(b-a)\left\{f'(c)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+f(c)\right\}$$

次に $(*)$ が成り立たない場合は，十分大きい M をとり $g(x)=f(x)+M$ とおくと $[a,\ b]$ で常に $g(x)>0$ が成り立つようにできる。

（$[a,\ b]$ における $f(x)$ の最小値 m に対して，たとえば $M=-m+1$ とおけば，$f(x)\geqq m$ より $g(x)=f(x)+M=f(x)-m+1>0$）

この $g(x)$ に対して

$$\int_a^b g(x)\,dx<(b-a)\left\{g'(c)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+g(c)\right\}$$

が成り立つ。この式に $g(x)=f(x)+M$ を代入すると

$$\int_a^b \{f(x)+M\}\,dx$$

$$<(b-a)\left\{f'(c)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+f(c)+M\right\}$$

整理すると

$$\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)\left\{f'(c)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+f(c)\right\}$$

(2)　(1)の不等式で $c=\frac{a+b}{2}$ とおけばよい。　■

※わかりやすいように(1)では(＊)をまず仮定して証明したが，(＊)を仮定せず直接図2における斜線部分の面積を考えてもよい。

(斜線部分の面積)

$$=\int_a^b\{f'(c)(x-c)-f(x)\}\,dx$$

$$=f'(c)\left[\frac{x^2}{2}-cx\right]_a^b-\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=(b-a)\left\{f'(c)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+f(c)\right\}-\int_a^b f(x)\,dx$$

が正であることから証明できる。

次に面積を使わない証明を考えてみる。

[別証] (2) $a<x$ として

$F(x)=(x-a)f\left(\dfrac{a+x}{2}\right)-\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ とおくと

$$F'(x)=\underset{\sim\sim\sim}{f\left(\frac{a+x}{2}\right)}+(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\underset{\sim\sim\sim}{-f(x)}$$

$a<x$ より $\dfrac{x+a}{2}<x$ だから，下線部の符号を変えたものに平均値の定理を使うと

$$f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)=\left(x-\frac{x+a}{2}\right)f'(d)$$

となる d $\left(\dfrac{x+a}{2}<d<x\right)$ が存在する。

よって　$F'(x)=\dfrac{x-a}{2}f'\left(\dfrac{x+a}{2}\right)-\dfrac{x-a}{2}f'(d)$

$$=\frac{x-a}{2}\left\{f'\left(\frac{x+a}{2}\right)-f'(d)\right\}$$

ここで $f''(x)<0$ より $f'(x)$ は単調減少だから，

$$\frac{x+a}{2}<d \text{ より } f'\left(\frac{x+a}{2}\right)>f'(d)$$

ゆえに $F'(x)>0$ だから $F(x)$ は単調増加で

$x>a$ のとき $F(x)>F(a)=0$

よって

$$(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)>\int_a^x f(x)\,dx \quad (a<x)$$

$x=b$ とおいて

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\int_a^b f(x)\,dx$$ ■

[注1] (1)の不等式は(2)の不等式を使って証明できる。$a<x<b$ のとき

$$G(x)=(b-a)\left\{f'(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)+f(x)\right\}-\int_a^b f(x)\,dx$$

とおくと

$$G'(x)=(b-a)\left\{f''(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)-f'(x)+f'(x)\right\}$$

$$=(b-a)f''(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)$$

したがって　$f''(x)<0$ より

$a<x<\dfrac{a+b}{2}$ のとき $G'(x)<0$

$\dfrac{a+b}{2}<x<b$ のとき $G'(x)>0$

よって $G(x)$ は $x=\dfrac{a+b}{2}$ で最小値

$$G\left(\frac{a+b}{2}\right)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\int_a^b f(x)\,dx$$

をとるが，(2)の不等式から，最小値は正である。

$a<x<b$ のとき $G(x)>0$ となるから，$x=c$ とおけばよい。 ■

[注2] [別証]の解法から定理1で $f''(x)<0$ の代わりに $f''(x)\leqq 0$ と仮定すると，結論の不等式も等号がついた形で不等式が成り立つことがわかる。

[注3] $f''(x)>0$ のときは，$f(x)$ の代わりに $-f(x)$ を考えることにより，次の結果を得る。

> **系1**　関数 $f(x)$ は，常に $f''(x)>0$ を満たすものとする。
>
> (1) $a<c<b$ のとき
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx>(b-a)\left\{f'(c)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+f(c)\right\}$$
>
> が成り立つ。
>
> (2) $a<b$ のとき
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx>(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
>
> が成り立つ。

[注4] 当然 $f''(x)\geqq 0$ のときは，上記の(1)，(2)の不等式で＞を≧に替えた不等式が成り立つ。

§2. 類題(大学入試問題)

> **問題1** (1) 関数 $f(t)$ は，$f(0)=0$ を満たし，常に $f''(t)\geqq 0$ であるとする。
>
> $$u(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$
>
> とおく。$x\geqq 0$ のとき，$u'(x)\geqq 0$，$u(x)\geqq 0$ であることを示せ。
>
> (2) 関数 $g(s)$ は，常に $g''(s)\geqq 0$ を満たすとす

る。$a<b$ のとき，不等式

$$\int_a^b g(s)\,ds \geqq (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

を示せ。〔05 大阪市大・理（後期）〕

問題 1 の(2)は注 4 の(2)と同じ不等式である。

問題 2　次の条件(A)，(B)，(C)を満たす関数 $f(x)$ $(x>0)$ を考える。

(A)　$f(1)=0$

(B)　導関数 $f'(x)$ が存在し，$f'(x)>0$ $(x>0)$

(C)　第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在し，$f''(x)<0$ $(x>0)$

(1)　$a \geqq \frac{3}{2}$ のとき，次の 3 つの数の大小を比較せよ。

$$f(a),\ \frac{1}{2}\left\{f\left(a-\frac{1}{2}\right)+f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\},$$

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

(2)　整数 n $(n \geqq 2)$ に対して，次の不等式が成立することを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)+\frac{1}{2}f(n) < \int_1^n f(x)\,dx$$

(3)　次の極限値を求めよ。ただし，log は自然対数を表す。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\log n!-\log n^n}{\log n}$$

〔05 東京医歯大〕

問題 2 の(1)は，定理 1 (2)から

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

$$<\left\{a+\frac{1}{2}-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}f\left(\frac{a-\frac{1}{2}+a+\frac{1}{2}}{2}\right)=f(a)$$

となり，$\frac{1}{2}\left\{f\left(a-\frac{1}{2}\right)+f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}$ と $\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ の比較は適当な台形の面積と $\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ を比べればよい。

§3. おわりに

［注 1］の結果の副産物として次のことがわかる。c を変化させると，図 2 における斜線部分の面積は $c=\frac{a+b}{2}$ のとき最小となる。

系 2　関数 $f(x)$ は，$[a,\ b]$ で常に $f''(x)<0$ を満たすものとする。このとき，$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ $(a<t<b)$ における接線と $y=f(x)$ および 2 直線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれる部分の面積は $t=\frac{a+b}{2}$ のとき最小となる。

類題として次のような問題が出題されている。

問題 3　a は正の定数として，xy 平面における曲線 $C：y=\frac{1}{a}\log(x+1)$ と考える。ただし，対数は自然対数である。

C 上の点 $\left(t,\ \frac{1}{a}\log(t+1)\right)$ $(0<t<a)$ における C の接線と 2 直線 $x=0$，$x=a$ との交点をそれぞれ P，Q とおく。そのとき，線分 PQ と x 軸，および 2 直線 $x=0$，$x=a$ とで囲まれた台形の面積を S とする。また，線分 PQ と曲線 C，および 2 直線 $x=0$，$x=a$ とで囲まれた部分の面積を T とする。

(1)　t が $0<t<a$ の範囲を動くとき，S を最小にする t の値，および S の最小値を求めよ。

(2)　t が $0<t<a$ の範囲を動くときの T の最小値を m とおく。

(ア)　m を求めよ。

(イ)　$a\to\infty$ のときの m の極限値を求めよ。

必要ならば，$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてもよい。〔05 東京理科大・理工〕

系 2 の結果から S，T は $t=\frac{0+a}{2}=\frac{a}{2}$ のとき最小となる。

追記　2007 年に東大（前）理科$\boxed{6}$(1)で $0<x<a$ を満たす実数 x，a に対し，

$$\frac{2}{a}x<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

を示す問題が出題されているが，左側の不等式は系 1 (2)から成り立つことがわかる。

《参考文献》

〔1〕入試問題集　数Ⅲ・C　2005　数研出版編集部編　数研出版

（栃木県立真岡高等学校）