特集 〈工夫した授業展開〉

遊び心と高校数学

―絶対値を含む2次関数のグラフと直線で囲まれる部分の面積問題を通じて―

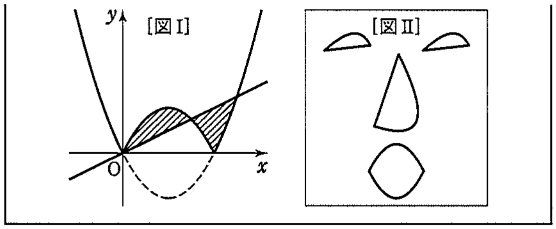
横山(よこやま)　政道(まさみち)

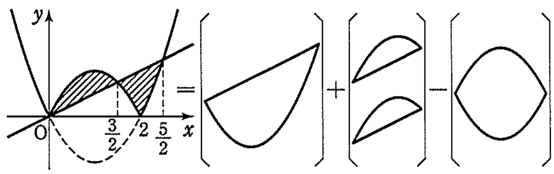
§1. はじめに

$f''(x)$ の符号と凹凸の関係を   の絵で説明すると生徒達は喜んで覚えようとする。何かいいこと(プラスな事)があると人は嬉しくなるし，逆によくないこと(マイナスな事)があると腹が立ったり悲しかったりする。そんな人の表情を曲線の凹凸に結びつける発想は，遊び心がないとなかなか思い浮かばない。これを私に教えてくれたK先生は常日頃から教材研究に熱心で，私自身教わる事も多い。さっそく授業で使わせてもらうと，生徒の反応はすこぶる良かった。何か自分も遊び感覚で授業ができないものかと考えているとき，ある試験で絶対値を含む2次関数と直線で囲まれる部分の面積を $\frac{1}{6}$ 公式で求める問題が出題された。大半の生徒は公式に気づかずそのままの式を計算して結局は泥沼化→自滅していった。生徒達は，公式が使える形に図を見直すことに抵抗があり，なかなか理解してくれない。真夏のある晩のこと，囲まれた部分をじっくり眺めていくと一つ一つの部分が人の顔のように見えてきた。そしてこの類似の問題のほとんどが不思議なくらい見えるのである。その晩，不気味な顔(図II)が頭から離れず寝付きが悪かった。以下具体例で説明していきたい。

§2. 具体例

【問題1】 放物線 $y=|x(x-2)|$ と直線 $y=\frac{1}{2}x$ で囲まれる図形の面積 S (図I)を，目・鼻・口の3つのピース(図II)を〔　〕に入れ S を求める式をつくれ。



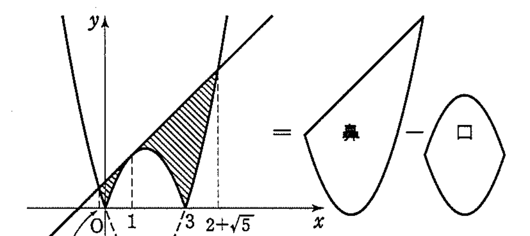


$$S=\int_0^{\frac{5}{2}}\left\{\frac{1}{2}x-x(x-2)\right\}dx+2\int_0^{\frac{3}{2}}(-x^2+2x)dx$$
$$-2\int_0^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3+2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-2\cdot\frac{2^3}{6}=\frac{17}{16}$$

図から求める面積は“鼻＋目－口”で求まる。この関係を $S=N+2E-M$ と書くことにする。N, E, M はそれぞれ nose, eye, mouth の頭文字である。

次の【問題2】は“鼻－口”で求まる最も簡単なタイプになる。

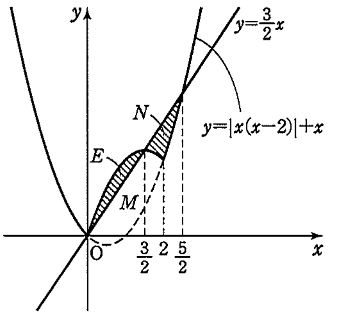
【問題2】 放物線 $y=|x(x-3)|$ ……① 上の点 $(1,\ 2)$ における接線の方程式を求め，この接線と放物線で囲まれる図形の面積 S を求めよ。



$$S=\frac{(2\sqrt{5})^3}{6}-2\times\frac{3^3}{6}=\frac{20\sqrt{5}-27}{3}$$

次の2つの関数はやや複雑な式にはなるが，同様な考え方で計算式を立てることができる。ただし，考える関数は直線とで囲まれる部分がはっきりわかるもので，また直線は説明上原点を通る直線で考えることにする。

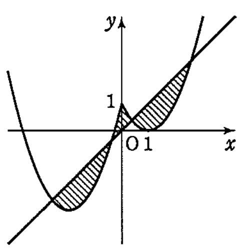
> 【問題3】 $y=|x$ の2次式$|+(x$ の1次式$)$
> (例) $y=|x(x-2)|+x$ と $y=\frac{3}{2}x$ で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

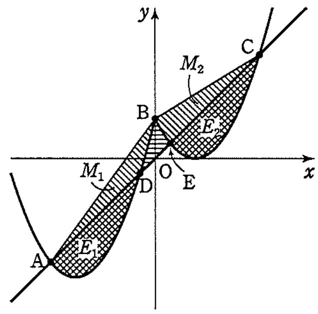


面積Sは【問題1】と同じ $S=N+2E-M$ の式で求められる。

$$S=\int_0^{\frac{5}{2}}\left\{\frac{3}{2}x-x(x-2)-x\right\}dx$$
$$+2\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{-x(x-2)+x-\frac{3}{2}x\right\}dx$$
$$-\int_0^{2}[-x(x-2)+x-\{x(x-2)+x\}]dx$$
$$S=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3+2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{|1-(-1)|}{6}\cdot 2^3$$
$$=\frac{17}{16}$$

> 【問題4】 $y=(x$ の2次式$)-|(x$ の1次式$)|$
> (例) $y=x^2+x+1-|3x|$ と $y=x$ で囲まれた部分の面積Sを求めよ。





5点A, B, C, D, Eの座標は

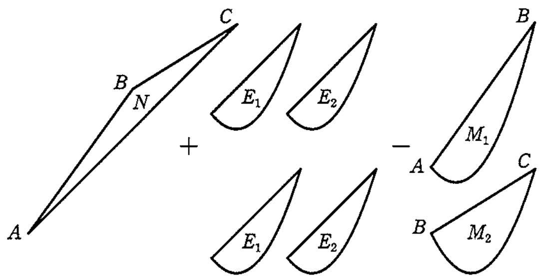
A$\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$

B$(0, 1)$

C$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

D$\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$

E$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$



【問題1】と比べてM(口)とE(目)が2個ずつになっていることから面積Sの式は次式で与えられる。

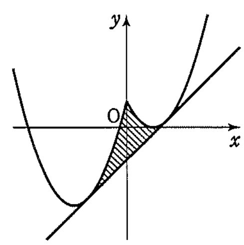
$$S=N+\sum_{k=1}^{2}(2E_k-M_k)$$

それでは実際に計算する。

$E_1=E_2$，$M_1=M_2$ から面積Sは

$$S=N+2(2E_1-M_1)$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+4\cdot\frac{(\sqrt{5})^3}{6}-2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{(3+\sqrt{5})^3}{8}$$
$$=\frac{-3+5\sqrt{5}}{2}$$

また【問題4】に関連して，2つの放物線と共通接線で囲まれる部分の面積は頻出である。



$y=x^2+4x+1$ と
$y=(x-1)^2$

の共通接線の方程式は $y=x-\frac{5}{4}$ (計算略)

面積Sは $S=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left\{x^2+4x+1-\left(x-\frac{5}{4}\right)\right\}dx$

$$+\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{(x-1)^2-\left(x-\frac{5}{4}\right)\right\}dx$$
$$=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2dx+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^3\right]_{-\frac{3}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}$$

[別解] $\frac{1}{12}$ 公式を用いると $\frac{3^3}{12}=\frac{9}{4}$

【問題５】 座標平面上の曲線 $C: y=|x^2-1|$ と直線 $l: y=a(x+1)$ が３点で交わっているとき，

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

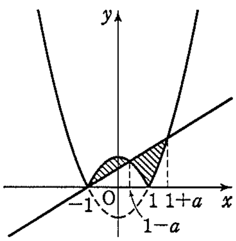
(2) C と l で囲まれた２つの図形の面積 S を a を用いて表せ。

(3) S の最小値とそのときの a の値を求めよ。

［富山大］

［解］ (1) $0<a<2$ （計算は略）

(2)



$$S=\int_{-1}^{a+1}\{a(x+1)-(x^2-1)\}dx$$
$$+2\int_{-1}^{1-a}\{1-x^2-a(x+1)\}dx-2\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$
$$=\frac{(a+2)^3}{6}+2\cdot\frac{1}{6}(2-a)^3-\frac{2}{6}\cdot 2^3$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+3a^2-2a+\frac{4}{3}$$

(3) $S(a)=-\frac{1}{2}a^2+6a-2=-\frac{1}{2}(a^2-12a+4)$

$S'(a)=0$ を $0<a<2$ の範囲で解くと

$a=6-4\sqrt{2}$

$S(a)$ の増減表を書くと，

a	0	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	最小	↗	

$a=6-4\sqrt{2}$ のとき $a^2-12a+4=0$

であるから

$$S(a)=-\frac{1}{6}(a^3-18a^2+12a)+\frac{4}{3}$$
$$=\cdots\cdots=\frac{32}{3}a-\frac{8}{3}$$

と変形でき，$S(6-4\sqrt{2})$ を計算すると

$$S(6-4\sqrt{2})=\frac{8(23-16\sqrt{2})}{3}$$

したがって，$a=6-4\sqrt{2}$ のとき S の最小値は

$$\frac{8(23-16\sqrt{2})}{3}$$

絶対値を含む２次関数のグラフと直線で囲まれる部分の面積に関する問題は，毎年どこかの大学で出題されていて，最近では宇都宮大，長崎県立大(2006)，大阪府立大，県立広島大(2007)などがある。

§3. 終わりに（雑感）

このように一見難しそうな問題を身近な題材で学ばせることは，生徒の興味関心を高め積極的な学習姿勢の契機になると考える。特に，数学を不得手にしている生徒ほど，意欲の増す度合いは大きいようである。教師になった頃（昭和60年）の生徒達は，基本的なことを教科書で一通り教えてやると後は自分でしっかり復習し，自ら問題を見つけ解こうとする意欲のある者が多かったが，最近はそういった生徒は少なくなったように思う。モチベーションをどのようにして高めていくか，我々教師の重要かつ喫緊の課題の一つではなかろうか。

（宮崎県立宮崎南高等学校）