剰余の表現について

吉田 亮介（よしだ りょうすけ）

多項式 $P(x)$ を $x-1$，$x+2$ で割った余りがそれぞれ 5，-1 である。$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ。

（数研出版 新編 数学II 応用例題 2 $p.45$）

典型的な剰余を求める問題です。

教科書では，商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とし，$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$ として，$x=1$，-2 を代入して a と b を求めるという解答を与えています。ここでは，さらに $ax+b$ を $x-1$ で割った式を $P(x)$ の剰余項として設定する解答を提示します。

解答

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とし，余りを次のように表現する。

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+a(x-1)+5 \quad \cdots\cdots①$$

①に $x=-2$ を代入すると

$$P(-2)=-3a+5=-1 \quad (\because \ P(-2)=-1)$$

より $a=2$ となるので，余りは

$$2(x-1)+5=2x+3 \quad \text{答}$$

参考 もちろん，

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+a(x+2)-1$$

に $x=1$ を代入してもよい。

多項式 $f(x)$ は $x-1$ で割ると余りは 2，x^3+1 で割ると余りは $(x-1)^2$ であるという。$f(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ。〔芝浦工大〕

割る式は 2 次式より，剰余項 $ax+b$ をさらに $x-1$ で割った式を設定します。

解答

$f(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q_1(x)$ とし，余りを次のように表現する。

$$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+a(x-1)+2 \quad \cdots\cdots①$$

$f(x)$ を x^3+1 で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると

$$f(x)=(x^3+1)Q_2(x)+(x-1)^2 \quad \cdots\cdots②$$

①と②に $x=-1$ を代入すると

$a(-1-1)+2=(-1-1)^2$ より $a=-1$ となる。

これを①の剰余項に代入して

$$-(x-1)+2=-x+3 \quad \text{答}$$

多項式 $P(x)$ は $x-1$，$x+1$，$x+2$ で割ったとき，余りがそれぞれ 9，1，3 である。$P(x)$ を $(x-1)(x+1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。〔早稲田大〕

次の 3 次式で割る問題では，剰余項を ax^2+bx+c とおく立式が一般的かと思われますが，この剰余をさらに $x-1$ で割った式を剰余項として設定します。

解答

$P(x)$ を $(x-1)(x+1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とし，余りを次のように表現する。

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)Q(x)+\{ax+(a+b)\}(x-1)+9 \quad \cdots\cdots①$$

①に $x=-1$ を代入すると，

$$P(-1)=(-a+a+b)(-2)+9=1 \ (P(-1)=1)$$

より $b=4 \quad \cdots\cdots②$

①に $x=-2$ を代入すると，

$$P(-2)=(-2a+a+b)(-3)+9=3$$

$(P(-2)=3)$ より $-a+b=2 \quad \cdots\cdots③$

②と③より $a=2$ なので，余りは

$$(2x+2+4)(x-1)+9=2x^2+4x+3 \quad \text{答}$$

参考 剰余項をこのように設定することで，連立 3 元 1 次方程式に持ち込まない流れを得ます。

多項式 $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは $8x-2$，$(x-2)^2$ で割ったときの余りは $3x+11$ である。$f(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ。〔西日本工大〕

ここでは，剰余項を ax^2+bx+c と設定する方法と見比べてみます。

解答 1

$f(x)$ を問題文の順の式で割ったときの商を，$Q_1(x)$，$Q_2(x)$，$Q_3(x)$ とすると

$f(x)=(x-1)^2Q_1(x)+8x-2$ ……①

$f(x)=(x-2)^2Q_2(x)+3x+11$ ……②

$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q_3(x)+ax^2+bx+c$ ……③

①，③より　$f(1)=6=a+b+c$ ……④

②，③より　$f(2)=17=4a+2b+c$ ……⑤

③から，ax^2+bx+c を $(x-1)^2$ で割った余りは $(2a+b)x+(c-a)$ となり

$(2a+b)x+(c-a)=8x-2$ （①より）

係数を比較して

$2a+b=8$ ……⑥

$c-a=-2$ ……⑦

⑤，⑥，⑦より　$a=3$　これを⑥，⑦に代入して

$b=2$，$c=1$　　よって　$3x^2+2x+1$　答

解答 2

$f(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とし，余りを次のように表現する。

$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q_1(x)+a(x-1)^2+8x-2$ ……①

$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると，

$f(x)=(x-2)^2Q_2(x)+3x+11$ ……②

①と②に $x=2$ を代入すると，

$a(2-1)^2+8\cdot2-2=3\cdot2+11$ より　$a=3$ となる。

これを①の剰余項に代入して，

$3(x-1)^2+8x-2=3x^2+2x+1$　答

このように剰余項の未知数を減らす設定をすることで，(若干かもしれませんが) 計算が簡素になるかと思われます。

《参考文献》

〔1〕 宮原 繁　モノグラフ 『式の計算』 科学新興新社

〔2〕 新編 数学II　検定済教科書　数研出版

(北海道浜頓別高等学校)