$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_{n}\mathrm{C}_{k}k^{n}=n!$ をご存じでしたか？

松村（まつむら） 文人（ふみと）

§1. はじめに

「漸化式を差分，和分で解く」という教材 Print を作成中に，差分の基本的な公式の記述中に現れて，おやっ？　と思ったのがこの式でした。整数ベキに 2 項係数をかけて，正，負交互に足したものが，n の階乗になるというのが少々の驚きで，2～3 人の同僚に聞いてみたら，知らないというので，少し調べてみました。

§2. 差分の定義

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ を関数 $y=f(x)$ の 1 階差分という。

2 階以上の差分を次のように定義する。

$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)$　（2 階差分）

$\Delta^3 f(x)=\Delta(\Delta^2 f(x))=\Delta^2 f(x+1)-\Delta^2 f(x)$（3 階差分）

一般に，n を自然数として，

$\Delta^n f(x)=\Delta(\Delta^{n-1} f(x))=\Delta^{n-1} f(x+1)-\Delta^{n-1} f(x)$　（n 階差分）

§3. 基本的な命題

(1) $\Delta c=0$　（c は定数）

(2) $\Delta(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\Delta f(x)+\beta\Delta g(x)$　（α，β は定数）

〈Proof〉

(1) $\Delta c=c-c=0$

(2) $\Delta(\alpha f(x)+\beta g(x))$

$=\{\alpha f(x+1)+\beta g(x+1)\}-\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}$

$=\alpha\{f(x+1)-f(x)\}+\beta\{g(x+1)-g(x)\}$

$=\alpha\Delta f(x)+\beta\Delta g(x)$　(Q.E.D.)

§4. 定理

【定理】 (1) $\Delta x^n=\sum_{k=1}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{k}x^{n-k}$ $(n\geqq 1)$

(2) $\Delta^n x^n=n!$

(3) $\Delta^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_{n}\mathrm{C}_{k}f(x+k)$

〈Proof〉

(1) $\Delta x^n=(x+1)^n-x^n=\sum_{k=0}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{k}x^{n-k}-x^n$

$=\sum_{k=1}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{k}x^{n-k}$

(2) $n=1$ のとき，$\Delta x=(x+1)-x=1$ で成立するから，$n\geqq 2$ とする。

$\Delta^2 x^n=\sum_{k=1}^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{k}\{(x+1)^{n-k}-x^{n+k}\}$

$={}_{n}\mathrm{C}_{1}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{1}x^{n-2}+(0$ or $n-3$ 次以下の整式$)$

$1\leqq i<n$ として，

$\Delta^i x^n={}_{n}\mathrm{C}_{1}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{1}\cdots\cdots{}_{n-i+1}\mathrm{C}_{1}x^{n-i}$

$+(0$ or $n-i-1$ 次以下の整式$)$

$\therefore$　$\Delta^n x^n={}_{n}\mathrm{C}_{1}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{1}\cdots\cdots{}_{n-i+1}\mathrm{C}_{1}\cdots\cdots{}_{1}\mathrm{C}_{1}=n!$

(3) $\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)$

$=f(x+2)-f(x+1)-\{f(x+1)-f(x)\}$

$=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)$

$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+1)-\Delta^2 f(x)$

$=f(x+3)-2f(x+2)+f(x+1)$

$-\{f(x+2)-2f(x+1)+f(x)\}$

$=f(x+3)-3f(x+1)+3f(x+1)-f(x)$

…………………………………………………

$\Delta^n f(x)=f(x+n)-nf(x+n-1)$

$+{}_{n}\mathrm{C}_{2}f(x+n-2)+\cdots\cdots$

$+(-1)^k{}_{n}\mathrm{C}_{k}f(x+n-k)+\cdots\cdots+(-1)^n f(x)$

$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_{n}\mathrm{C}_{k}f(x+n-k)$

$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_{n}\mathrm{C}_{k}f(x+k)$　(Q.E.D.)

【定理】(3)で，$f(x)=x^n$ とおくと，

$\Delta^n x^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_{n}\mathrm{C}_{k}(x+k)^n$　で**【定理】**(2)により，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_{n}\mathrm{C}_{k}(x+k)^n=n!$　ここで，

$x=0$ とおくと，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_{n}\mathrm{C}_{k}k^n=n!$ をうる。

§5. 差分を使わないで，高校生にもできる証明

【補題】 $n\geqq 1$，$0\leqq i<n$（n，i は整数）とすると，
$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_nC_k k^i=0$

〈Proof〉

n に関する帰納法で証明する。$n\geqq 1$，$i=0$ のとき，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_nC_k=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k$$
$$=(-1)^n(-1+1)^n=0$$

なので，今後 $n\geqq 2$，$1\leqq i<n$ として証明する。

(i) $n=2$ とする。このとき， $i=1$ であるから，

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^{2+k}{}_2C_k k=-{}_2C_1+2{}_2C_2=-2+2=0$$

∴ $n=2$ で成立する。

(ii) $n\geqq 2$ で成立するとする。

$k\geqq 1$ で，${}_{n+1}C_k=\dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}$

$=\dfrac{(n+1)n!}{\{n-(k-1)\}!k(k-1)!}=\dfrac{n+1}{k}{}_nC_{k-1}$ より，

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1+k}{}_{n+1}C_k k^i=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1+k}{}_{n+1}C_k k^i$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1+k}{}_nC_{k-1}k^{i-1}$$

ここで $k-1=j$ とおくと，

$$(n+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+2+j}{}_nC_j(j+1)^{i-1}$$
$$=(n+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j\sum_{l=0}^{i-1}{}_{i-1}C_l j^{i-1-l}$$
$$=(n+1)\sum_{l=0}^{i-1}{}_{i-1}C_l\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j j^{i-1-l}$$

$0\leqq i-1-l<n$ だから，帰納法の仮定により

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j j^{i-1-l}=0$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1+k}{}_{n+1}C_k k^i=0$$

したがって，$n+1$ でも成立する。 (Q.E.D.)

【定理】 $n\geqq 1$，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_nC_k k^n=n!$

〈Proof〉

n に関する帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき，$\sum_{k=0}^{1}(-1)^{1+k}{}_nC_k k={}_1C_0\cdot 1=1$ で成立する。

(ii) $n\geqq 1$ で成立するとする。

すなわち，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_nC_k k^n=n!$ とする。

$k\geqq 1$ で，${}_{n+1}C_k=\dfrac{n+1}{k}{}_nC_{k-1}$ より，

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1+k}{}_{n+1}C_k k^{n+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1+k}{}_{n+1}C_k k^{n+1}$$
$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1+k}{}_{n+1}C_{k-1}k^n$$

$k-1=j$ とおくと，$n+1+k=n+2+j$ だから，
$(-1)^{n+1+k}=(-1)^{n+j}$ に注意して，

$$(n+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j(j+1)^n$$
$$=(n+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j\sum_{l=0}^{n}{}_nC_l j^{n-l}$$
$$=(n+1)\sum_{l=0}^{n}{}_nC_l\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j j^{n-l}$$
$$=(n+1)\left\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j j^n+\sum_{l=1}^{n}{}_nC_l\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j j^{n-l}\right\}$$

補題より，$0\leqq n-l<n$ だから

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j j^{n-l}=0$$

また帰納法の仮定により，$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j j^n=n!$

だから，

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1+k}{}_{n+1}C_k k^{n+1}$$
$$=(n+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}{}_nC_j j^n$$
$$=(n+1)n!=(n+1)!$$

したがって $n+1$ でも成立する。 (Q.E.D.)

§6. 終わりに

§5. 差分を使わないで，高校生にもできる証明の帰納法での証明は，中がよく見えなくて何となく釈然としないので，もっと直接的な証明があれば，ご教示願いたいと思う今日この頃なのです。

《参考文献》

〔1〕 石川廣美 著 差分方程式入門 コロナ社

（兵庫県 親和女子高等学校）