三角形の重心が描くもう一つの図形

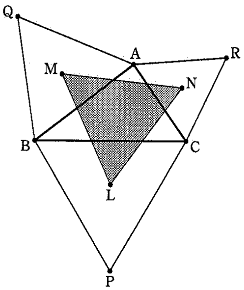
結川（ゆいかわ）　義明（よしあき）

§1. はじめに

三角形の重心が描く図形を論じたものとして，【ナポレオンの定理】がある。

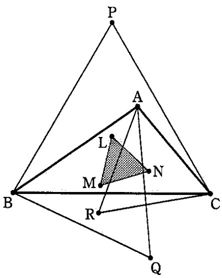
ナポレオンの定理

［1］ 三角形 ABC の<u>外側</u>に辺 AB，BC，CA を一辺とする正三角形をつくり，それらの重心を L，M，N とすると，三角形 LMN は正三角形になる。



三角形 LMN を**“外側ナポレオン三角形”**という。

［2］ 三角形 ABC の<u>内側</u>に辺 AB，BC，CA を一辺とする正三角形をつくり，それらの重心を L，M，N とすると，三角形 LMN は正三角形になる。

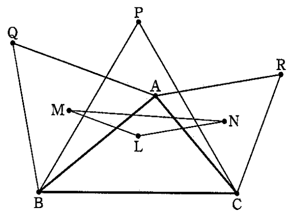


三角形 LMN を**“内側ナポレオン三角形”**という。

ちなみに

外側ナポレオン三角形と内側ナポレオン三角形の面積の差は，最初の三角形の面積に等しくなる。

さて，下図のように，三角形 ABC の外側に辺 AB，CA を一辺とする正三角形をつくり，内側に辺 BC を一辺とする正三角形をつくり，それらの重心を L，M，N とする。このとき，3 つの重心を結んだ三角形は正三角形という“美しい図形”にならないことは容易にわかる。



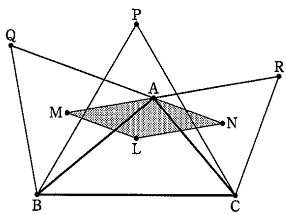
ところが，このような場合でも 3 つの重心は“美しい図形”を描いているのである。

ここでは，三角形の重心が描くもう一つの図形を紹介する。

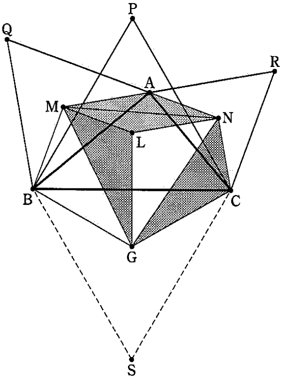
§2. 三角形の重心が描くもう一つの図形

［3］ 三角形 ABC の外側に辺 AB，CA を一辺とする正三角形をつくり，内側に辺 BC を一辺とする正三角形をつくり，それらの重心を L，M，N とする。

四角形 AMLN が存在するとき，四角形 AMLN は平行四辺形になる。



〈証明〉 辺BCに関して点Pと対称な点をSとし，△SBCの重心をGとする。
まず，△BGM≡△LGNを示す。

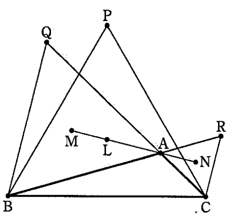


【ナポレオンの定理】より，△MGNは正三角形となり，さらに△BGLも正三角形となることから，

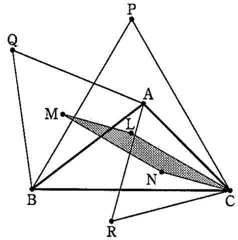
・MG＝NG（△MGNは正三角形）
・BG＝LG（△BGLは正三角形）
・∠BGM＝∠LGN
（∠BGL＝∠MGN＝60°,
∠BGL－∠MGL＝∠MGN－∠MGL）

よって，2辺挟角が等しいことから，
△BGM≡△LGN
ゆえに，BM＝LN
また，BM＝AM から　LN＝AM　……①
同様に，△MGL≡△NGCより LM＝CN
また，CN＝AN から　LM＝AN　……②
①，②より向かい合う2組の対辺が等しいので，四角形AMLNは平行四辺形になる。終

［注］ ∠BAC＝120° のとき，4点A，L，M，Nが同一直線上にあり，四角形AMLNは存在しない。

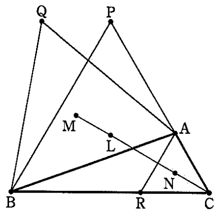


［4］ 三角形ABCの外側に辺ABを一辺とする正三角形をつくり，内側に辺BC，辺CAを一辺とする正三角形をつくり，それらの重心をL，M，Nとする。
四角形CLMNが存在するとき，四角形CLMNは平行四辺形になる。



（証明略）

［注］ 点Aが辺CPの（延長線）上にあるとき，4点C，L，M，Nは同一直線上にあり，四角形CLMNは存在しない。



§3. おわりに

数学の美しさ，不思議さを感得させる教材として，平面幾何は格好なものと考える。離れた点と点を結ぶと“美しい図形”が突如浮かび上がる。数学の芸術性，神秘性を実感する時である。

数学嫌い，数学離れが叫ばれている今日，そのような機会を生徒に体験させることは極めて重要なことと考える。

《参考文献》

〔1〕 岩田 至康 編　幾何学大辞典3　証明問題 －平面－　槇書店
〔2〕 西山 享 著　よくわかる幾何学　丸善株式会社

（埼玉県立入間高等学校）