直線と円の交点を通る放物線

稲田（いなだ）　富美男（とみお）

§0．はじめに

次の「考え方」は円と直線の交点を通る円の方程式を求めるときなどに良く使われる。

> 曲線の方程式 $f(x,\ y)=0$ ……①,
> $g(x,\ y)=0$ ……② に対して
> $kf(x,\ y)+lg(x,\ y)=0$ ……③
> ($k,\ l$ は同時に 0 とならない定数) は①, ②のすべての交点を通る曲線 (群) を表す。

この「考え方」は直線と円の交点を通る放物線の方程式を求める時などには使えない。そこで定数 k の部分を変数に変えることにより解くことを考えてみた。ただし，以下は数学IIまでの範囲で済ませるため放物線は軸が y 軸に平行なもののみ扱う。

§1．直線と円の交点を通る放物線の方程式

> (問題 1)　直線 $y=x+1$ ……① と
> 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ ……② の交点と原点を通る放物線の方程式を求めよ。

普通は①, ②の交点の座標を求め，放物線 $y=ax^2+bx+c$ がこの交点と原点を通るようにする。しかし，①, ②の交点の x 座標は $\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$ で計算が煩雑である。そこで

$$\{y-(x+1)\}(y+x+k)+l\{(x-1)^2+(y-2)^2-3\}=0 \quad \cdots\cdots③$$

とおく。ただし，$k,\ l$ は定数。③は①②の交点を通る 2 次曲線の方程式である。③の左辺を展開すると y^2 の係数は $l+1$ なので $l=-1$ とする。このとき，③は

$$(k+3)y-2x^2+(1-k)x-(k+2)=0 \quad \cdots\cdots④$$

となり，$k\neq-3$ のとき放物線の方程式である。原点を通ることにより $k=-2$ を得るので求める放物線の方程式は $y=2x^2-3x$ である。

$k=-3$ のとき④は x についての 2 次方程式となり，①, ②の交点を通る y 軸に平行な 2 直線である。

§2．直線と放物線の交点を通る円の方程式

> (問題 2)　直線 $y=x+1$ ……① と放物線
> $y=x^2-2x$ ……② の交点と点 $(1,\ 0)$ とを通る円の方程式を求めよ。

$$\{y-(x+1)\}(y+x+k)+l\{y-(x^2-2x)\}=0 \quad \cdots③$$

とおく。ただし，$k,\ l$ は定数とする。③は，①, ②の交点を通る 2 次曲線の方程式である。③の左辺を展開したとき，x^2, y^2 の係数はそれぞれ $-1-l$, 1 であるから，$-1-l=1$ として $l=-2$ を得る。また，$(1,\ 0)$ を通ることより $k=-2$ を得る。これらを③に代入して円の方程式 $x^2+y^2-3x-5y+2=0$ を得る。

§3．傾きの和が 0 の 2 直線と円，放物線

一般的に直線 $y=ax+b$ ……① と 2 次曲線 $f(x,\ y)=0$ ……② が異なる 2 点で交わるとき

$$(y-ax-b)(y+ax+k)+lf(x,\ y)=0 \quad \cdots\cdots③$$

($k,\ l$ は定数) は①, ②の交点を通る 2 次曲線である。②が円のときは③が放物線，②が放物線のときは③が円となるように定数 l を選ぶことができる。

また，$(y-ax-b)(y+ax+k)=0$ は傾きの和が 0 になる 2 直線を表しており，「考え方」の特別な場合と見ることもできる。

> (問題 3)　次の(1), (2), (3)を証明しなさい。
> (1)　傾きの和が 0 の 2 直線と放物線が異なる 4 点で交わるとき，この 4 点を通る円が存在する。
> (2)　傾きの和が 0 の 2 直線と円が異なる 4 点で交わりどの 2 点も x 座標が異なるとき，4 点を通る放物線が存在する。

(3) 円と放物線が異なる4点で交わるとき，これらを結んでできる直線のうち3組の対は傾きの和が0である。

以下傾きの和が0の2直線を
$(y-ax+b)(y+ax+c)=0$ ……①，放物線の方程式を $y=dx^2+ex+f$ ……② $(d\neq 0)$，円の方程式を $x^2+y^2+gx+hy+i=0$ ……③ とおく。

(1)の証明

$(y-ax+b)(y+ax+c)+l(y-dx^2-ex-f)=0$
……④ は l が定数のとき4つの交点を通る2次曲線である。x^2，y^2 の係数 $-a^2-ld$，1が等しくなるよう定数 l を定めると④は円の方程式となり条件を満たす。

(2)の証明

$$(y-ax+b)(y+ax+c)+l(x^2+y^2+gx+hy+i)=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

は l が定数のとき4つの交点を通る2次曲線である。x^2，y^2，y のそれぞれの係数が $l-a^2\neq 0$，$l+1=0$，$b+c+lh\neq 0$ であるとき放物線の方程式となる。

$l=-1$ とする。また $b+c-h=0$ のとき⑤は x についての2次方程式となり y 軸に平行な2直線である。このとき4つの交点はこのどれかの上にあるから仮定に反する。

(3)の証明

放物線②と円③の交点を $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$，$D(x_4,\ y_4)$ とおく。A，Bを通る直線の方程式を $y-ax+b=0$ とする。

$d(y-ax+b)(y+ax+c)-(y-dx^2-ex-f)=0$
（c は定数）は $d\neq 0$ より A，B を通る円を表す。この円が点Cを通るときの c の値を c_3 とすると

$d(y_3-ax_3+b)(y_3+ax_3+c)-(y_3-dx_3{}^2-ex_3-5)=0$
点Cは，放物線 $y=dx^2+ex+f$ 上にあり，かつ直線 $y-ax+b=0$ 上にはないことより

$y_3=dx_3{}^2+ex_3+f$ かつ $y_3-ax_3+b\neq 0$
よって $y_3+ax_3+c_3=0$ を得る。円が点Dを通るときの c の値を c_4 とすると同様に $y_4+ax_4+c_4=0$ を得る。どちらも同一の円③を表しているから $c_3=c_4$ が成り立つ。したがって，直線 $y+ax+c_3=0$ は2点C，Dを通り，A，Bを通る直線と傾きの和が0である。直線ACと直線BD，直線ADと直線BCについても同様に成り立つ。

§4．終わりに

「考え方」を使うときの注意から「探求」してみました。§3の(1)は参考文献で見つけました。

《参考文献》

〔1〕 大学への数学　数学ショートプログラム　東京出版

（兵庫県立加古川南高等学校）