中学生にもわかるピタゴラス数の求め方とその絶大なる効果への驚き

君島（きみじま） 巖（いわお）

§0. はじめに

今から15年程前のことである。那須地区教育会の当番校になったので，何か発表してくれないかと校長に言われました。……それなら何か目玉になるものをと“中学生にも分かるピタゴラス数の求め方の方法”を何とか考えてみようと必死になった。……ある時，突然アイデアが浮かんだ。

$x^2+y^2=z^2$ （x，y，z は自然数）

§1. x に整数を代入

$$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)$$

ここで，いきなり $x=3$ とおくのである。すると

$(z+y)(z-y)=9$

$z+y$ は $z-y$ より大きいから $z+y=9$，$z-y=1$

これを解くと　$z=5$，$y=4$ が出てくる。

[1]　$x=3$ のとき　$x=3$，$y=4$，$z=5$

$x=5$ のとき　$x=5$，$y=12$，$z=13$

$x=7$ のとき　$x=7$，$y=24$，$z=25$

一般に $x=2t+1$ のとき $z-y=1$ のタイプが無限に出てくる。

[2]　$x=4$ のとき　$(z+y)(z-y)=16$

$z+y=16$，$z-y=1$ とし自然数の条件をはずせば

$z=\dfrac{17}{2}$，$y=\dfrac{15}{2}$　整数化すると

$x=8$，$y=15$，$z=17$

$x=6$ のとき

$x=12$，$y=35$，$z=37$

$x=8$ のとき

$x=16$，$y=63$，$z=65$

一般に $x=2t$ のとき，$z-y=2$ のタイプが無限に出てくる。

§2. x に小数を代入

さてここで条件をゆるめて単に $x>0$ としてみる。恐るべきピタゴラス数の深淵が覗ける。

[1]　例えば $x=1.1$ とすると

$(z+y)(z-y)=1.1^2=1.21$

仮に $z+y=1.21$，$z-y=1$ とすると $z=1.105$，$y=0.105$ となるが1000倍して，5で割ると $x=220$，$y=21$，$z=221$ が得られ，これはピタゴラス数である。

次に $x=2.1$ とすると

$(z+y)(z-y)=2.1^2=4.41$

仮に $z+y=4.41$，$z-y=1$ とすると $z=2.705$，$y=1.705$ が得られ，上と同じ方法で $x=420$，$y=341$，$z=541$ が得られる。

更に $x=3.1$ とすると $(z+y)(z-y)=9.61$

仮に $z+y=9.61$，$z-y=1$ とすると $z=5.305$，$y=4.305$　これより新しい $x=620$，$y=861$，$z=1061$ が得られる。

このように $x=1.1$，2.1，3.1，…，10.1，… とおいていっても無限のピタゴラス数が得られる。

[2]　$x=1.11$ のとき　$(z+y)(z-y)=1.2321$

$z+y=1.2321$，$z-y=1$ とすると

$z=1.11605$，$y=0.11605$　これより

$x=22200$，$y=2321$，$z=22321$

ここで y と z は互いに素である。ユークリッドの互除法で確かめられよ。

$x=1.11$，2.11，3.11，4.11，… として同様にこのグループからも無限のピタゴラス数が得られるのが予想されよう。

[3]　最後にもう一つ $x=3\times1.7=5.1$ とする。

$(z+y)(z-y)=(3\times1.7)^2=26.01$

仮に $z+y=3^2=9$，$z-y=1.7^2=2.89$ とする。

$z=5.945$，$y=3.055$，1000倍して5で割ると

$x=1020,\ y=611,\ z=1189$ …Ⓐ

§3. ピタゴラス数の位置づけ

さてこれ等のピタゴラス数の位置づけはどうなるのだろうか。前に数研通信 No.16 で「互いに素なピタゴラス数は無限にあり，しかも自然数と対応づけられる」という内容を示した。再掲しよう。

〈ピタゴラス数の統一式〉

$\alpha,\ \beta,\ m,\ x,\ y,\ z$ が自然数のとき

$$\left.\begin{array}{l} x=\beta+2m \\ y=\alpha+2m \\ z=\alpha+\beta+2m \end{array}\right\}\quad \cdots Ⓑ$$

ただし，$\alpha\beta=2m^2$ は $x^2+y^2=z^2$ の自然数解のすべてを与える。

今，Ⓐの組が何番目の自然数に対応しているのか調べよう。

$$x=\beta+2m \quad \cdots①$$

$$y=\alpha+2m \quad \cdots②$$

$$z=\alpha+\beta+2m \quad \cdots③$$

①＋②－③より　$2m=x+y-z$

$$\therefore\quad m=\frac{x+y-z}{2}=\frac{1020+611-1189}{2}=221$$

したがってⒶは自然数 221 に対応するのである。

§4. おわりに

それにしてもシンプルな方法なのに何とすごい結果が出せるのだろう。我々は文字でカッコよくやることに慣れているが，泥くさい数値計算も数学の奥深さを知るのに役立つのである。

一度授業で，この方法を生徒にやらせたことがある。$x=3$ の例を黒板で説明したらすぐ何人かの生徒が $x=4,\ 5,\ 6$ と試みできた。論理的に導き出すとういうのは生徒にも面白いのである。

（栃木県　矢板中央高等学校）