「円組合せ」についての考察

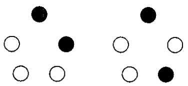
菅谷(すがや)　円博(みつひろ)

§0. はじめに

生徒が入試に出た問題の質問にきた。「円状に並んだ15箇所に赤4個，白5個，黒6個のものを置く場合の数を求める」という問題で，「円組合せ」ともいえるが，奥の深い問題なので考察してみた。

§1. 円組合せの問題点

円組合せでは，対象を同じものとみなすので円順列の「1つを固定する」という考え方が使えない。図1の例では円状の5箇所から2箇所選ぶ場合の数であるが，2通りしかない。1つを固定したとしても，ローテーションすると同じ並びになるものが出てきてしまうのである（図1）。



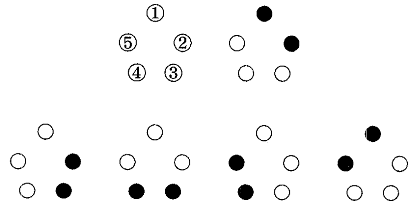
（図1）

以下，円状に並んだn箇所からr箇所選ぶ場合の数をnとrを用いて表すことを考察する。その過程で${}_n\mathrm{S}_r$なる式を定義していく。（Sはsameの S）

§2. nとrが互いに素のときの${}_n\mathrm{S}_r$

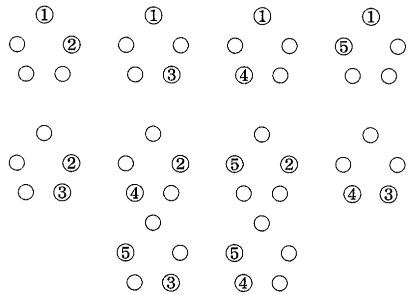
n箇所に1からnまでの番号を振る。この中からr箇所選ぶ場合の数は${}_n\mathrm{C}_r$である。nとrが互いに素のとき，これらの${}_n\mathrm{C}_r$個の中には，ローテーションして同じ場合となるものがn組ずつある（図2）。したがって，場合として異なるものは$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{n}$通りである。（全体で$N$個，同じ場合とみなせるものが$M$組ずつあるとき，場合として異なるものは$\dfrac{N}{M}$通りだが，これを商の法則と呼んではどうか）

① nとrが互いに素のとき ${}_n\mathrm{S}_r={}_n\mathrm{C}_r$ と定義すると，円状に並んだn箇所からr箇所選ぶ場合の数は$\dfrac{{}_n\mathrm{S}_r}{n}$である。



（図2）

図3は，$\dfrac{{}_5\mathrm{S}_2}{5}$の例である。5と2は互いに素であるので5箇所から2箇所選ぶ場合の数は${}_5\mathrm{C}_2=10$，ローテーションで同じものが5組ずつあるので5で割ると $\dfrac{{}_5\mathrm{S}_2}{5}=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{5}=2$ である。



（図3）

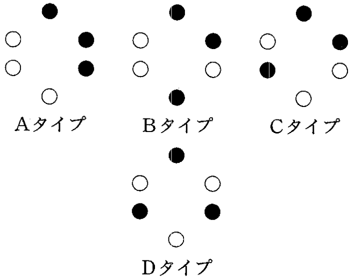
§3. nとrが互いに素でないときの${}_n\mathrm{S}_r$

この場合はnとrには1でない最大公約数mがあり，あらためて，$n=n'm$，$r=r'm$ とする。

互いに素の場合と違い，${}_n\mathrm{C}_r$個の中に同じものがn組ずつあるわけではない。図4は円状の6箇所から3箇所選ぶ場合であるが，${}_6\mathrm{C}_3$の20個のうち，A～Cタイプが6個ずつ，Dタイプが2個である。$\left(\dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{n}\text{が自然数にならない!}\right)$

Dのようなタイプは，自分自身のn回のローテー

ションによって同じものが出てくるという共通点がある。それ以外のタイプは $_nC_r$ 個の中に同じものが n 組ずつあるので，この2つを区別する必要がある。そこで，自分自身の n 回のローテーションによって同じものが出てくるタイプを「回転タイプ」，それ以外を「非回転タイプ」と名づける。



(図4)

回転タイプは，1以外の最大公約数mにより次のように作ることができる。n 個全体をm等分した n' 個を1グループとしたとき，この n' 箇所から r' 箇所選ぶ。その並びと同じ並びを残りのグループに当てはめて，つなげて円状にする。回転タイプの1つのグループは n' 箇所から r' 箇所選ぶ組合せになり，それをmグループつなげただけなので，n' と r' が互いに素(①の場合)を考慮すると回転タイプのローテーションも含めた総数は $_{n'}S_{r'}$ となる($_{n'}S_{r'}={}_{n'}C_{r'}$ に注意　図5)。全体では n' 個の円組合せと同様に，同じ並びが n' 組あり，場合の数は $\frac{_{n'}S_{r'}}{n'}$ である。

○○○○○○○○○○……

↓　全体の n 個をm等分

○○○｜○○○｜○○○｜○……

↓　1グループは n' 個

○○○

↓　n' 個中 r' 個選ぶ $_{n'}C_{r'}$ 通り

●○○

↓　mグループつなげて円状にする

●○○｜●○○｜●○○｜●……

(図5)

② n と r の最大公約数 m が素数のとき

mが素数であるとき，回転タイプの総数は $_{n'}S_{r'}$ で，非回転タイプの総数を $_nS_r$ と定義すると $_nS_r+{}_{n'}S_{r'}={}_nC_r$ から $_nS_r={}_nC_r-{}_{n'}S_{r'}$ となる。非回転タイプは同じものが n 組ずつあるので，非回転タイプの場合の数は $\frac{_nS_r}{n}$ となる。したがって両タイプの合計は $\frac{_nS_r}{n}+\frac{_{n'}S_{r'}}{n'}$ である。

③ n と r の最大公約数 m が素数でないとき

この場合は複雑なので具体的な例を挙げてみよう。円状の12箇所から6箇所選ぶ場合(最大公約数6は素数でない)は6の約数1，2，3，6で回転タイプが決定される。約数2，3，6にはそれぞれ，$_6S_3$，$_4S_2$，$_2S_1$ 個の回転タイプが対応している(図6)。約数1には非回転タイプが対応し，その数を $_{12}S_6$ と定義(つまり，$_nS_r$ は非回転タイプの総数)して，これらを加えると $_{12}C_6$ になることから

$$\begin{aligned}_{12}S_6&={}_{12}C_6-{}_6S_3-{}_4S_2-{}_2S_1\\&={}_{12}C_6-({}_6C_3-{}_2S_1)-({}_4C_2-{}_2S_1)-{}_2C_1\\&=924-(20-2)-(6-2)-2=900\end{aligned}$$

求める場合の数は

$$\frac{_{12}S_6}{12}+\frac{_6S_3}{6}+\frac{_4S_2}{4}+\frac{_2S_1}{2}=80$$

一般的には，m の公約数を a_1，a_2，……，a_N とすると，円組合せの場合の数は $\sum_{k=1}^{N}\frac{_{n'a_k}S_{r'a_k}}{n'a_k}$ となり，これは①と②の場合も含んでいる。

§4. 問題の解答

最初に掲げた問題であるが，15箇所中4箇所に赤を置く場合の数は，15と4は互いに素(①の場合)なので $\frac{_{15}S_4}{15}=\frac{_{15}C_4}{15}=\frac{1365}{15}=91$，残りの11箇所から5箇所選んで白を置く場合の数が $_{11}C_5=462$，残り6箇所に黒を置けばよい。したがって場合の数は $\frac{_{15}S_4}{15}\times{}_{11}C_5=42042$ (通り) となる。

これを先に6個の黒を置くと考えると，15と6の最大公約数3は素数(②の場合)より，場合の数は

$$\frac{_{15}S_6}{15}+\frac{_5S_2}{5}=\frac{_{15}C_6-{}_5S_2}{15}+\frac{_5C_2}{5}$$

$$=\frac{5005-10}{15}+\frac{10}{5}=333+2=335\ (\text{通り})$$

残りの9箇所に4箇所置く場合の数は，

(1) 非回転タイプ333個は $_9C_4=126$ (通り)

(2) 回転タイプ2個は，残りの9個中4個の円組合せを考えて $\frac{_9S_4}{9}=\frac{_9C_4}{9}=14$ (通り) の非回転タイ

$n=12$, $r=6$, $m=2$, $n'=6$, $r'=3$ の場合

　全体の n 個を m 等分

○○○○○○｜○○○○○○｜

↓　　1グループは n' 個

○○○○○○

↓　　n' 個中 r' 個選ぶ ${}_{n'}C_{r'}$ 通り

●●○○●○

↓　　m グループつなげて円状にする

●●○○●○｜●●○○●○｜

回転タイプは ${}_6S_3={}_6C_3-{}_2C_1$ だけある

●○●○●○｜●○●○●○｜

○●○●○●｜○●○●○●｜　を除く

$n=12$, $r=6$, $m=3$, $n'=4$, $r'=2$ の場合

　全体の n 個を m 等分

○○○○｜○○○○｜○○○○｜

↓　　1グループは n' 個

○○○○

↓　　n' 個中 r' 個選ぶ ${}_{n'}C_{r'}$ 通り

●●○○

↓　　m グループつなげて円状にする

●●○○｜●●○○｜●●○○｜

回転タイプは ${}_4S_2={}_4C_2-{}_2C_1$ だけある

●○●○｜●○●○｜●○●○｜

○●○●｜○●○●｜○●○●｜　を除く

$n=12$, $r=6$, $m=6$, $n'=2$, $r'=1$ の場合

○○○○○○○○○○○○

↓　　全体の n 個を m 等分

○○｜○○｜○○｜○○｜○○｜○○｜

↓　　1グループは n' 個

○○

↓　　n' 個中 r' 個選ぶ ${}_{n'}C_{r'}$ 通り

●○

↓　　m グループつなげて円状にする

●○｜●○｜●○｜●○｜●○｜●○｜

回転タイプは ${}_2S_1={}_2C_1$ だけある

（図6）

プになる。さらに置き方により異なる並びになるものが3組ずつある（図7）。

したがって総数は，

$$\frac{{}_{15}S_6}{15}\times{}_9C_4+\frac{{}_5S_2}{5}\times\frac{{}_9S_4}{9}\times 3$$

$=333\times 126+2\times 42=42042$（通り）

となり赤から置く場合と一致するが複雑になる。

この例でわかるように，総数335通りに直接 ${}_9C_4$ をかけてはいけない。回転か非回転かで場合分けが必要である。

●　　　　●

○ ●　　　○ ○

○ ○　　　○ ●

↓　　　　↓

●●○○○　　●○●○○

↓

A　●●○○○｜●●○○○｜●●○○○

B　●○●○○｜●○●○○｜●○●○○

回転タイプは $\frac{{}_5S_2}{5}=2$（通り）しかない

A　●●○○○｜●●○○○｜●●○○○

↓　↓　↓

○○○　○○○　○○○

9個中4個の円組合せ

◎◎○　○◎○　◎○○

↓　↓　↓

●●◎◎○｜●●○◎○｜●●◎○○

●●○◎◎｜●●○○◎｜●●○◎○

●●◎○◎｜●●◎○○｜●●○○◎

1個ずつシフトしていくと3通り

円状にすると異なる並びになる3組の例

（図7）

§5. 「円組合せ」について

円組合せに関しては，現実に問題になるのは「じゅず順列」で同じものを含む場合だろう。このときは商の法則から，円組合せの場合の数を表裏の2組で割ればよい。授業でビーズなどを利用してブレスレッドを作らせるのも面白いのかもしれない。例えば，白6個，赤6個のビーズでブレスレッドを作ると，円組合せは，§3の例から80通りなので，表裏の2通りで割って40通り。つまり，クラス40人で1通りずつできる計算になる。

（山梨県立吉田高等学校）