特集

現行の教科書に対して参考書・問題集等で補充しておきたい内容

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§0. はじめに

当然のことながら，数学の指導というのは教科書に記載されていることだけを教えることではない。よく，教科書を教えるのではなく，教科書で教えるとか言うが，それ以外のことも考慮しなければならない。また，内容を「わかる」ように教えることも大切であるが，それだけでは十分とはいえない。

生徒の多様化が進んでいると言われる。この「多様化」という言葉は，「これまでの指導上の常識が通用しなくなった」ということと同義なのである。

学習者である生徒の目的には，自己実現に向けてのそれぞれの思惑があるが，大ざっぱに言えば①数学そのものに興味・関心があり，学習することに喜びを感じる生徒，②問題が解けて，高得点が得られることや志望大学の合格可能性の高まりに喜びを見出す生徒，③無関心の生徒，④数学嫌い，数学拒否の生徒と言えるだろう。多様な生徒について，それぞれ適切な「補充・補助教材」が必要になるのであるが，本稿では①②を対象に，「現行の教科書に対しての補充しておきたい内容」について述べてみたい。

§1. 勤務校のようす

勤務校は，岩国藩の藩学を前身とし，120余年の歴史をもつ山口県東部の進学校である。昭和47年に理数科(各学年１クラス)を設置し，平成11年には単位制を，14年には２学期制，65分授業を導入した。また，15年から３年間は文科省からスーパーサイエンスハイスクールに指定された。文武両道を校訓の１つとし，部活動も盛んで，平成15，16年には野球部が夏の甲子園に連続出場した。

なお，生徒数は280名×3学年次＝840名で，進学状況は，国公立大約140名，私大約500名(平成17年度，延べ数)である。

§2. 数学履修状況

単位制高校ということもあり，希望する進路の実現を図れるようなカリキュラム編成が行われ，多様なコースに分けられている。

それらは理数科であれば，理数Ｉコース，理数IIコースである。前者は，理系の国公立大学や私立大学の志望者に対し，「数学III」「数学Ｃ」の受験に対応する選択ができるコースであり，後者は「数学II」「数学Ｂ」までの受験である文系学部の受験も視野に入れたコースである。

普通科には，文系コースとして文Ｉ，文II，文IIIの３コースがある。文Ｉコースは受験に必要な数学が「数学II」「数学Ｂ」までで，①地歴２科目対応の文Ｉαコース，②大学センター試験６教科７科目対応の文Ｉβコース，③理科２科目対応の文Ｉγに細分されている。また，文IIコースは，文Ｉコースとは数学や理科の比重を変え，受験に必要な数学は「数学Ｉ」「数学Ａ」までで，文系の科目が多く選択できるコースである。文IIIコースは，数学の履修が２年次で終了するコースである。

また，理系コースとして理Ｉ，理IIの２コースがある。理Ｉコースは，「数学III」「数学Ｃ」の選択ができ，大学センター試験５教科７科目に対応できるコースであり，理IIコースは理系の主に私立大学の志望者対象で，「数学II」「数学Ｂ」までの履修である。理Ｉコースは，謳い文句に『「数学III」「数学Ｃ」の選択ができる』とあるように，必ずしも全員が「数学III」「数学Ｃ」を選択しているのではない。実際，コース振り分け時には選択者は４分の３程度である。しかも，考査ごとに希望があれば「数学II」「数学Ｂ」選択講座に移動できるという制度を設けているので，最後まで「数学III」「数学Ｃ」を履修するのは７割程度である。また，理数科での「数学III」「数学Ｃ」の履修率は８割程度である。

なお，コース分けは２年次であり，「数学III」「数学Ｃ」の教科書が終わるのは，理数科では３年次６月末，普通科では３年次10月末頃である。

§3. 傍用問題集，参考書の活用

教科書の内容 $+\alpha$ を教えるには授業時間は決して十分ではない。65分授業を行っているので通常の50分授業よりは1コマ当たりは多く進めるが，家庭学習，特に問題を解くという復習が十分でないと効果は上がりにくい印象を受けている。

さて，「プラス α」つまり「補助教材」を使いたい気持ちはあるが，実際の所，その時間的余裕はほとんどなく生徒の自主的な学習に委ねているのが現状である。現在，年間6回の定期考査を実施しているが，考査の出題範囲は，基本的には①教科書，②傍用問題集，③参考書からである。②や③は①によりその範囲が規定されるが，そこには教科書では「扱わなかった」，あるいは「扱えなかった」内容が含まれることがある。(②についてはノート点として5点分評価している。) なお，チャート式参考書であれば，「基本例題」「重要例題」「補充例題」という例題の分類がなされているが，文系の場合には「基本例題」，理系の場合には「重要例題」まで，理数科の場合には「補充例題」までという範囲設定をして，定期考査には①〜③の問題をベースにし，1，2問程度はオリジナル，あるいは入試問題レベルを出題している。

§4. 補充・補助しなければならない背景

これまでは「ゆとり教育」を行うために，教科書の質，量における削減が行われ，かつては扱っていた内容が消滅したり，軽い扱いになったりした。それなりの大学を目指すとき，その内容の理解や習熟が不可欠な場合には「補充」をしなければならない。特に「整数問題」のように十分に扱う機会のない内容については意識的に補充しておかなければならない。結局は，「補充」には入試からの暗黙の要請が関係している。また，「補助」には，学習内容の深化統合を図る意味合いもあるが，理想・理念はそうであっても現実問題としては「大学入試における必要性」があるからである。

こういう補充・補助教材に対して積極的に受け入れる体制が生徒にあるとは言い難い現実があるし，また，そうしなければならない現状にも問題がないとはいえない。指導者としての本音を言えば，教科書をスカスカにしておいて，適切に補充・補助しなければならないというのは不愉快である。

§5. 補助教材はいつ，どこで —適切なタイミング，レディネス—

先のことを見越せば，ここでこのような補助教材を入れればよいが…と思いつつも二の足を踏んでしまうことがよくある。一つは他教員との連携や進度のこと，もう一つは生徒のレディネスを考えるときである。場合によっては，よかれと思ったことが裏目に出ることさえある。適切なタイミング，効果的な内容であること，生徒のレディネスがあることなどを考慮しておかなければならない。むやみに詰め込むといった姿勢は避けるべきだと思っている。

§6. 補充・補助教材の例(I)

さて，現行の教科書に対して，思いつくままに，数学Iを中心に，補充・補助教材の例をいくつか挙げてみることにする。

(1) 最大公約数，最小公倍数

以前では，数学Iの最初で扱った内容であるが，削除されてしまった。中学校の整数で扱ったからそれで賄えるというスタンスには無理がある。そこで，2つの整式 A, B の最大公約数 G, 最小公倍数 L について，以下の性質があることを補充しなければなるまい。

1. $A=GA'$, $B=GB'$ (A' と B' は互いに素)
2. $L=GA'B'$
3. $AB=LG$

この知識が不十分であれば，分数式の通分も円滑にできない。また，筆算で計算する方法についても習得させておきたいものである。

(2) 整数について

ア　不定方程式の整数解

a 「約数」型，b 「互いに素」型

せめて，これぐらいは知らないと整数問題に対応できない。

イ　ガウス記号

場合分けや整数部分，小数部分を意識させるのによい。不連続な関数の例としてもよく扱われる。

(3) $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ の漸化式

$n=3$ までは対称式でよく扱われるが，

$X_n=x^n+\dfrac{1}{x^n}$ が，$X_{n+1}=X_1X_n-X_{n-1}$ という漸化式を満たしていることに触れておくと，その求め方

の構造がよく見えてくる。

(4)　展開，因数分解の公式追加

次の①，②は公式として扱う。②は等式の証明，3数の相加・相乗平均の不等式の証明等で重要である。

①　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

②　$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(5)　不等式の解に指定数の整数が含まれる問題

整数，不等号の意味を深くわからせるには必須問題である。

(6)　「ある x について $f(x)\geqq g(x)$」と
「すべての x について $f(x)\geqq g(x)$」

グラフ上でその意味の違いを知らせ，判別式で対応できることに気づかせる。

(7)　絶対値を含む関数のグラフ

場合分けによるグラフ描写やそのグラフから想定される位置関係で共有点を調べさせる。ここまで学習したことを総合的に用いる問題として適している。

(8)　面積に関わる公式

ア　ヘロンの公式

イ　面積から内接円の半径を求める公式

アはその証明をして，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ を公式として位置付ける。イは図形的な意味を押さえ，$r=\dfrac{S}{s}$ を公式として位置付ける。ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ である。

§7．補充・補助教材の例(II)

理解を深めるには，科目間を越えてその関係をわからせると効果がある。そこで，次のようなことも補助教材として扱えるだろう。

(1)　図形とベクトルのコラボレーション

ア　外心，重心，垂心の位置関係

三角形の5心は，数学Iの三角比では外心が主役クラス，数学Aにおいては外心，内心，重心はほぼ同格，数学IIでは重心＞垂心＞外心といった扱い。この5心のうち外心O，重心G，垂心Hの位置関係は，ベクトルを使って $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と表せる。生徒にとって関連性の見えにくいこれらの点の位置関係がベクトルですっきり表現でき，それぞれの点のもつ意味がベクトルを通して再認識できる。

イ　ベクトルによるチェバの定理

数学Aでチェバの定理を学んでいるが，それは相似比や面積比による証明である。これをベクトルで，点Pが関係する2つの線分を $s:(1-s)$，$t:(1-t)$ に内分する点として，その位置が説明できる解法でチェバの定理を別証すれば，平面図形と平面ベクトルが有機的に関連づけられる。

(2)　数列と行列のコラボレーション

係数行列と数列の一般項

一次変換 $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ では，係数の配列から行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考え，それやその行列式を使って，この一次変換が点や図形にどのような変化を与えるかが調べられる。

すると，漸化式が $a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}$ のとき，行列 $\begin{pmatrix} r & s \\ p & q \end{pmatrix}$ を使って考えてみようとする発想が湧いても不思議ではない。これは，固有値や固有ベクトルに関係するが，入試ではそれらの概念や名を伏して出題されることがあるし，A^n を求めることの流れやその意義をわからせるにはよいと思われる。

§8．尻切れトンボな内容は補充が必要

空間の直線と平面の方程式

―ちょっと頑張れば，見えてくるのに！

ア　x，y，z 表示

空間における直線や平面の方程式については，前者はベクトル方程式，後者は座標平面に平行な平面の方程式しか扱っていない。現在の中学校における2次方程式の解の公式みたいな感じで，あとちょっと頑張れば完全に扱える代物である。これらについては，かつて扱っていたように，前者は媒介変数を消去して $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ とすれば，平面における直線の方程式が

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}\left(y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)\right)$$

であるから自然な拡張であると生徒の目には映るであろう。同様に，平面の方程式が，法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とするとき，$ax+by+cz+d=0$ であることは，平面での直線の方程式が法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b)$ とするとき，$ax+by+c=0$ である

ことの自然な拡張であると映るはずである。こういうことから「理解」が深まること，「興味•関心」が生まれることを期待されると思われる。

イ　平面 ABC のベクトル方程式

教科書では，平面 ABC のベクトル方程式が，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (s,\ t\ \text{は実数})$$

で止めてある。そこでこれももう一歩踏み込んで指導するとよい。つまり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ (r+s+t=1)$$

まで触れておくのである。同値ではあるが，問題を解く際には後者の方が便利であるからである。

§9．補助教材の使用上の注意

けっして深入りはしないこと。本末転倒になることは避ける。こちらが悦に入って，よくわかっただろうと思っていてもその思いが伝わらないことがある。以前であれば，教科書に沿った説明ではそっぽを向くが，「はてな？」と思わせる題材を投げかけると聞き耳を立てたり，凝視したりする生徒がいたのであるが，今はこういう生徒が少なくなった。逆に，教科書外の内容を話すと困ったような顔をする生徒やそれも覚えなければいけないのですか？という不満顔の生徒も出てきた。

内容を削減して，「教科書に書いてあることは全員がわかってできる」教育を中学校まで受けてきた生徒が今，戸惑っている。教科書に書いてあることさえわからない，できないからである。それに加えて教科書に出ていないことまでを言ったらパニックに陥らないとも限らないのである。

教科書に載せないことで安心感を与える一方で，大学入試には不可欠なことが多く欠落しているのでは結果的には不誠実である。この不誠実な部分は，教科書，傍用問題集，参考書が三位一体となって補充・補助していく必要がある。

それにしても，これからは学力回復を目指す時代であるから，これまでとは違った教科書づくり，つまり，極力記載することが期待される。その内容に触れる，触れないは学校の実情に任せればよい。教科書，傍用問題集，参考書が三位一体となって，数学教育を支えればよいと思ってはいるが，その扇の要はやはり「教科書」であるとの思いが強いのは私ひとりだけではあるまい。

（山口県立岩国高等学校）