生徒の素朴な質問に思うこと(Ⅳ)
ー背理法による証明問題からー

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§0. はじめに

『$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，a，b が有理数のとき，$a+\sqrt{2}b=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。』という問題があるが，それは「背理法」が習得できたか否かを試す基本的な問題である。

この問題を試験(夏季課題１年テスト，２学期初日実施)に出題し，その採点をしながら，また，それについての生徒の疑問を一緒に考えながら思ったことを述べてみたい。

§1. 惨憺たる出来具合

採点をしながら愕然とした。「背理法」は，「その命題が成り立たないと仮定して矛盾を導き，その命題が成り立たなければならない」とするアリバイ崩しのような証明法である。したがって，結論の「$a=b=0$」が成り立たないと仮定することから始まる。「$a=b=0$」の否定は，「$a\neq 0$ または $b\neq 0$」であるが，ここが怪しい生徒が多く，$a\neq b\neq 0$ としている答案が多かった。「$a=b=0 \Longleftrightarrow a=0$ かつ $b=0$」であることが認識されず，安易に＝を≠に代えることでその否定を作ったと思っているらしい。背理法以前の問題である。

正解の生徒は数えるほどで，惨憺たる出来であった。確かに，模範解答さながらに出来ている生徒もいないわけではないが，「背理法」による証明がいかに定着していないかが改めて痛感された。１学期後半にこの内容を指導し，１学期末考査でも出題し，夏休みの課題帳にも載せ，その解答も配布しているにも関わらずであった。

ある調査によれば，1979年生まれ以降は，「ごまかし勉強」世代であるという。つまり，一夜漬けでも定期考査でいい点数が取れさえすればよいと考え，計画的，継続的な勉強習慣や深く追究する姿勢が希薄な世代であるという。現高校生は，これに「ゆとり教育」が拍車をかけた世代であるから，夏休みに復習して定着を図ろうと努力する生徒の割合も低下しているのであろう。このテストはそれを如実に実証しているのだと妙に納得してしまう次第であった。

§2. 模範解答

この問題は，教科書にもある基本的，重要な問題であるが，指導書やこの課題帳の解答には次のような，指導者にとっては当然ともいうべき解答が掲載されている。

【解】 $a+\sqrt{2}b=0$ より $b\neq 0$ とすると，$\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$

この左辺は無理数，右辺は有理数だから矛盾する。

よって，$b=0$ …(＊)

$a+0\sqrt{2}=0$ より $a=0$

ゆえに，$a=b=0$ ■

§3. 生徒の疑問
ーなぜ $b\neq 0$ と仮定するのかー

「背理法」に忠実に従えば，「$a\neq 0$ または $b\neq 0$」であることから矛盾を導かなければならないが，模範解答には，「$a\neq 0$」には言及せず「$b\neq 0$」だけで矛盾を導き，解答を展開してある。つまり，「$b\neq 0$」と仮定して矛盾が生じるので $b=0$ でなければならない。次に，$b=0$ を「$a+\sqrt{2}b=0$」に代入して，$a=0$ を得て，その後 $a=b=0$ となるのである。

この解答は，流れに沿って読めば論理的にわかるのであるが，なぜ「$a\neq 0$ または $b\neq 0$」ではなく，「$b\neq 0$」だけを仮定するのか？　この点に疑問を抱いた生徒がいたので，一緒に考えてみることにした。

確かに「$a\neq 0$ または $b\neq 0 \Longrightarrow$ 矛盾」であることは，「$b\neq 0 \Longrightarrow$ 矛盾」だけでは不十分で，「$a\neq 0 \Longrightarrow$ 矛盾」についても言及しなければならない。た

だ，集合で言えば「$a \neq 0$」は $\{(a, b) | a \neq 0\}$，「$b \neq 0$」は $\{(a, b) | b \neq 0\}$ であり，$\{(a, b) | a \neq 0\} \cap \{(a, b) | b \neq 0\} \neq \phi$ であるから，① $a \neq 0$ のとき，② $b \neq 0$ のときという場合分けではオーバーラップし不具合がある。

そこで，$\{(a, b) | a \neq 0\} \cup \{(a, b) | b \neq 0\} = \{(a, b) | b \neq 0\} \cup \{(a, b) | a \neq 0$ かつ $b = 0\}$ とすれば，$\{(a, b) | b \neq 0\} \cap \{(a, b) | a \neq 0$ かつ $b = 0\} = \phi$ となるので，(i) $b \neq 0$ のとき，(ii) $a \neq 0$ かつ $b = 0$ のときのように場合分けしてみる。

(i)のときには，(無理数)=(有理数) という矛盾が，(ii)のときには，「$a \neq 0$ かつ $a = 0$」という矛盾が生じ，結局「$a \neq 0$ または $b \neq 0 \Longrightarrow$ 矛盾」となり，$a = b = 0$ となる。

§4. 生徒と共に気づいたこと
―背理法だけなのか，背理法＋α なのか―

ここまで考察すると，あることに気がつく。

「$b \neq 0$」だけを仮定する証明，「$a \neq 0$ または $b \neq 0$」を仮定する証明をそれぞれ証明A，証明Bとすれば，証明Aにおいては，背理法自体は【解】の(*)の段階で完結している。その結果を受けて「$a = 0$」が導かれ，最終的に「$a = b = 0$」に至るのである。つまり，背理法＋α なのである。一方，証明Bにおいては，それ自体が背理法だけで完結している。

ここで整理しておこう。ただし，≪　≫内は背理法そのものの運用範囲，※印の箇所では「$a + \sqrt{2}b = 0$」を使うとする。また，「矛盾１」は，(無理数)=(有理数)，「矛盾２」は「$a \neq 0$ かつ $a = 0$」である。⟶ は証明の流れであるとすれば，それぞれ次のように図式化される。

$\boxed{\text{証明A}}$

≪$b \neq 0$※ ⟶ 矛盾１ ⟶ $b = 0$≫※ ⟶ $a = 0$ ⟶ $a = b = 0$

$\boxed{\text{証明B}}$

≪$a \neq 0$ または $b \neq 0$ ⟶ $b \neq 0$ または「$a \neq 0$ かつ $b = 0$」 ⟶ $\left\{ \begin{array}{l} b \neq 0\text{※} \longrightarrow \text{矛盾1} \\ a \neq 0 \text{ かつ } b = 0\text{※} \longrightarrow \text{矛盾2} \end{array} \right.$ ⟶ $a = b = 0$≫

いずれも「背理法」を用いて証明しているのだから，出題の意図には応えているが，生徒にとってわかりやすく，受け入れやすいのはどちらであろうか？

背理法という証明法で完結させる証明は，結論を否定した「$a \neq 0$ または $b \neq 0$」を仮定する本来の方向性をもつ証明Bであるが，これは証明Aに比べればその展開が冗長になる。一方，証明Aは証明Bよりスマートではあるが，いきなり「$b \neq 0$」だけから始まるので，先が見越せていないとこのような書き出しには唐突感が感じられるであろう。

このように分析してくると，証明Aで正解であった生徒は本当にここまで理解した上で，「$b \neq 0$ とすると…」と切り出したのであろうかという疑念が過ぎる。模範解答に書いてあったからとか，このように始めるとうまくいっているようだからとか，憶えていたからといった程度ではなかろうか？　いわば「用具的理解」によるものにすぎず，関係的，論理的，記述的に理解していない可能性が高い。

§5. まとめ

さて，見かけは「わかって，できる」ようであっても実は表層的で，模倣的な解答にすぎないことが多々ある。論理的考察力はそれまで習い覚えたことを自分なりに考えることやそれをまとめ上げる中に形成される。日常的な場面で自然に獲得した「論理」でも結構やれるものである。ただ，意識的に獲得しなければ構築できないような「論理」構造もある。「論理」を学習すれば，それで論理的考察ができるといったものでもない。

要は「はてな」という不思議心や探求心が働き，それが求心するさまざまな事柄を「関係的理解」「論理的理解」「記述的理解」することが必要なのである。今の教育は「用具的理解」はそれなりに育成してもこれら３つの理解を育成しがたい環境にある。

論理的考察というものは本来「関係的」に考察することを推進させるものであり，その考察結果が数学的に正しいことの吟味は「論理」に従って検討する。当然その活動には論理・数学的にみて適切に「記述」する，できるといった行為が随伴するものである。

答は出せるが論理・数学的にみて適切にその過程を説明したり，記述したりすることができないことがあるが，それができなくてもマーク式では正解と

なりうる。小4から中3までの児童・生徒を対象とした最近の調査で，国語，算数・数学において論理的考察とその表現に難点が，また答を出せてもその過程を説明できない傾向が認められたということである。その結果を受けて文章をもっと書かせる必要があるとしているが，彼らの先には，問題を解決する際に答に至る過程を論理・数学的に記述することが要求されていないマーク式の数学が待ち受けているという現体制に大いに矛盾を感じるのは私だけではないであろう。

§6. 補足

§4，5で出てきた4つの理解についての概説。

用具的理解…公式，定理等の成り立ちや解法のパターン，テクニック等による問題解決の「理由」との「関係」が欠如している，あるいは不十分であるにもかかわらず，それらを適用して問題を解決できること。換言すれば「適用してできる」ことの中に認められる「理解」である。

関係的理解…用具的理解で欠如している，あるいは不十分である「関係」が完備している「理解」のこと。「関係」には，「成立理由」との関係，「解決理由」との関係，「適用理由」との関係がある。

論理的理解…一連の論理的推論差鎖によって，仮定(条件)から結論にリンクできる「理解」のこと。自発的な「関係的理解」とは逆行的な努力が必要な場合がある。

記述的理解…内容的・形式的な「理解」があることを論理・数学的な表現(記号，言い回し，グラフ等を含む)で記述できること。

《参考文献》

〔1〕 論理的考察・表現に難　国語・算数・数学「記述指導必要」朝日新聞 2006.7.15

〔2〕 世界一短い中2の宿題時間　@データ　朝日新聞 2006.7.16

〔3〕 数学A　教師指導書　東京書籍 2006

〔4〕 西元教善　数学学習における『理解』の構造～低学力時代における意味と意義～　太陽書房 2002

〔5〕 西元教善　スーパーサイエンスハイスクール数学分野の実践記　～数学が「わかる」ことを求めて～　太陽書房 2006

〔6〕 西元教善　「理解」から見た学力低下　シグマジャーナル No. 23　文英堂

〔7〕 西元教善　数学学習における「メタ理解」教育の実践　～数学が「わかる」ことを目指して～　シグマジャーナル No. 30　文英堂

(山口県立岩国高等学校)