円周等分点の正弦・余弦の和は0

藤本（ふじもと）　隆（たかし）

§1. はじめに

生徒が三角関数の問題について質問に来た。ある問題の解説におよそ次のような記述があり，

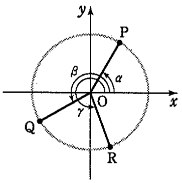
「………略………点P，Q，Rは円周を三等分しているから，半径OP，OQ，ORがx軸の正方向となす角をα，β，γとすると，

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$$

である。したがって………略………」

ここが解らないと言う。

これは，例えば次のように容易に説明できる。



$$\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\\&=\sin\alpha+\sin(\alpha+120^\circ)+\sin(\alpha+240^\circ)\\&=\sin\alpha+2\sin(\alpha+180^\circ)\cos(-60^\circ)\\&=\sin\alpha-\sin\alpha=0\end{aligned}$$

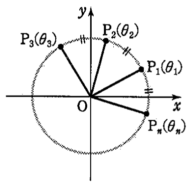
$$\begin{aligned}&\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\\&=\cos\alpha+\cos(\alpha+120^\circ)+\cos(\alpha+240^\circ)\\&=\cos\alpha+2\cos(\alpha+180^\circ)\cos(-60^\circ)\\&=\cos\alpha-\cos\alpha=0\end{aligned}$$

生徒が納得して教室に戻った後，私は「これは三等分に限らず成り立つのではないか」と感じ，本稿の考察を試みた。このテーマは次のように表される。

§2. 一般論に拡張

単位円周をn等分（nは2以上の整数）する点をP$_1$，P$_2$，P$_3$，……，P$_n$とし，半径OP$_k$ ($k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$) が$x$軸の正方向となす角を$\theta_k$とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k=\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k=0$$

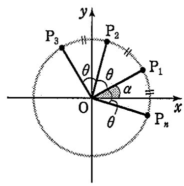


（$\angle \mathrm{P}_k\mathrm{O}x=\theta_k$ を P$_k$(θ_k) と表示）

これは次のように表しても同値である。

$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$（nは2以上の整数）のとき，任意の角αについて

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\{\alpha+(k-1)\theta\}=\sum_{k=1}^{n}\cos\{\alpha+(k-1)\theta\}=0$$



以下，いくつかの私の証明を記す。

【証明(4)】は複素数平面を用いているので新教育課程の範囲外だが，最近までは課程内であったので取り上げた。

【証明(5)】は全く範囲外だが，最近話題の「博士の愛した数式」を用いているので取り上げた。

§3. いろいろな証明

【証明(1)】

$S=\sum_{k=1}^{n}\sin\{\alpha+(k-1)\theta\}$ とおき，両辺に $2\sin\dfrac{\theta}{2}$ をかけると

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\pi}{n}\neq 0\ \cdots\cdots①\right)$$

$$2S\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2\sin\{\alpha+(k-1)\theta\}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}\theta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2k-3}{2}\theta\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left(\alpha+\frac{2k-3}{2}\theta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}\theta\right)\right\}$$

$$=\left\{\cos\left(\alpha-\frac{1}{2}\theta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\theta\right)\right\}$$

$$+\left\{\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\theta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\theta\right)\right\}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left\{\cos\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}\theta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\theta\right)\right\}$$

$$=\cos\left(\alpha-\frac{1}{2}\theta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\theta\right)$$

$$=-2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\theta\right)\sin\left(-\frac{n\theta}{2}\right)$$

$\left(\theta=\dfrac{2\pi}{n}\ \text{より}\ \dfrac{n\theta}{2}=\pi\ \text{であるから}\right)$

$$=2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\theta\right)\sin(-\pi)$$

$$=0$$

よって，$2S\sin\dfrac{\theta}{2}=0$

①より　$S=0$

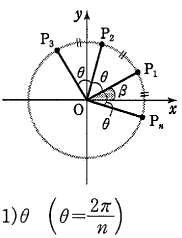
すなわち　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\{\alpha+(k-1)\theta\}=0$

ここで，α を $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ におきかえると

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\{\alpha+(k-1)\theta\}=0$$

【証明(2)】

単位円周上の n 等分点（n は 2 以上の整数）を P_k ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$) とし，
半径 OP_k が x 軸の正方向となす角を θ_k とおくと，
（ただし，$P_{n+1}=P_1$，$\theta_{n+1}=\theta_1=\beta$ とする）



$$\theta_k=\beta+(k-1)\theta\quad\left(\theta=\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\cos\theta_{k+1}-\cos\theta_k)$$

$$=-2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta_{k+1}+\theta_k}{2}\sin\frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2}$$

$$=-2\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\beta+\frac{2k-1}{2}\theta\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=-2\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\beta+\frac{2k-1}{2}\theta\right)\ \cdots\cdots①$$

また

$$\sum_{k=1}^{n}(\cos\theta_{k+1}-\cos\theta_k)$$

$$=(\cos\theta_2-\cos\theta_1)+(\cos\theta_3-\cos\theta_2)$$

$$+\cdots\cdots+(\cos\theta_{n+1}-\cos\theta_n)$$

$$=\cos\theta_{n+1}-\cos\theta_1$$

$$=\cos\theta_1-\cos\theta_1=0\ \cdots\cdots②$$

①，②より

$$-2\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\beta+\frac{2k-1}{2}\theta\right)=0$$

ここで $\sin\dfrac{\theta}{2}=\sin\dfrac{\pi}{n}\neq 0$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\beta+\frac{2k-1}{2}\theta\right)=0$$

$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\left(\beta+\frac{1}{2}\theta\right)+(k-1)\theta\right\}=0$$

β は任意の角であるから $\beta+\dfrac{1}{2}\theta=\alpha$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\{\alpha+(k-1)\theta\}=0$$

α を $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ におきかえると

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\{\alpha+(k-1)\theta\}=0$$

【証明(3)】

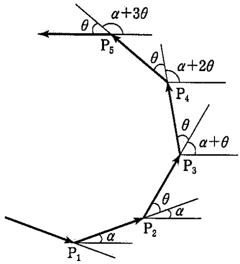
$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$，$\theta_k=\alpha+(k-1)\theta$ とする。

(i)　$n=2$ のとき

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2=\sin\alpha+\sin(\alpha+\pi)$$
$$=\sin\alpha-\sin\alpha=0$$
$$\cos\theta_1+\cos\theta_2=\cos\alpha+\cos(\alpha+\pi)$$
$$=\cos\alpha-\cos\alpha=0$$

(ii)　$n\geqq 3$ のとき

辺の長さが 1 である正 n 角形 $P_1P_2P_3\cdots\cdots P_n$ において，$\overrightarrow{P_1P_2}$ が x 軸の正方向となす角を α とおき，この正 n 角形の 1 つの外角を θ とおくと，$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ であるから



$\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$（ただし，$P_{n+1}=P_1$）が x 軸の正方向となす角は　$\alpha+(k-1)\theta$　である。よって

$\overrightarrow{P_kP_{k+1}}=(\cos\{\alpha+(k-1)\theta\},\ \sin\{\alpha+(k-1)\theta\})$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\cos\{\alpha+(k-1)\theta\},\ \sin\{\alpha+(k-1)\theta\})$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\{\alpha+(k-1)\theta\},\ \sum_{k=1}^{n}\sin\{\alpha+(k-1)\theta\}\right)$$

ここで $\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{P_kP_{k+1}}=\vec{0}=(0,\ 0)$ であるから

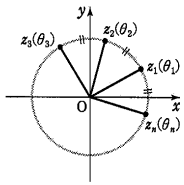
$$\sum_{k=1}^{n}\cos\{\alpha+(k-1)\theta\}=\sum_{k=1}^{n}\sin\{\alpha+(k-1)\theta\}=0$$

(i)，(ii)より，２以上のすべての整数 n について

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\{\alpha+(k-1)\theta\}=\sum_{k=1}^{n}\cos\{\alpha+(k-1)\theta\}=0$$

【証明(4)】

複素数平面上の単位円で，点 P_k と角 θ_k を【証明(2)】と円様に定め，点 P_k が表す複素数を z_k とすると



（$\arg z_k=\theta_k$ を $z_k(\theta_k)$ と表示）

$$z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$$

また，z_k は方程式　$z^n=\alpha$ $(|\alpha|=1)$ の解であるから

$$\begin{aligned}z^n-\alpha&=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots\cdots(z-z_n)\\&=z^n-(z_1+z_2+z_3+\cdots\cdots+z_n)z^{n-1}\\&\quad+(z_1z_2+z_1z_3+\cdots+z_nz_{n+1})z^{n-2}\\&\quad+\cdots\cdots+(-1)^nz_1z_2z_3\cdots z_n\end{aligned}$$

これは z についての恒等式だから，各係数が一致する。よって　$z_1+z_2+z_3+\cdots\cdots+z_n=0$

すなわち，$\sum_{k=1}^{n}z_k=0$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)=0$$

$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k+i\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k=0$$

$\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k$，$\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$ は実数であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k=\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k=0$$

【証明(5)】

$\theta=\dfrac{2\pi}{n}$，$\theta_k=\alpha+(k-1)\theta$ とする。

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k+i\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$$

（オイラーの公式“$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$”より）

$$=\sum_{k=1}^{n}e^{i\theta_k}=\sum_{k=1}^{n}e^{i(\alpha+(k-1)\theta)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}e^{i(\alpha-\theta)}e^{ik\theta}=e^{i(\alpha-\theta)}\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}$$

$$=e^{i(\alpha-\theta)}\sum_{k=1}^{n}(e^{i\theta})^k=e^{i(\alpha-\theta)}\times\frac{e^{i\theta}\{1-(e^{i\theta})^n\}}{1-e^{i\theta}}$$

$$=\frac{e^{i\alpha}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\alpha}(1-e^{i2\pi})}{1-e^{i\theta}}$$

$$=\frac{e^{i\alpha}\{1-(e^{i\pi})^2\}}{1-e^{i\theta}}\ \cdots\cdots①$$

ここで，「オイラーの公式」より

$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

（“$e^{i\pi}=-1$”　は「博士の愛した数式」）

であるから，

①より　$\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k+i\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k=\dfrac{e^{i\alpha}\{1-(-1)^2\}}{1-e^{i\theta}}=0$

$\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k$，$\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$ は実数であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k=\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k=0$$

《参考文献》

〔1〕 オイラーの贈物　人類の至宝 $e^{\pi i}=-1$ を学ぶ　吉田武著　ちくま学芸文庫
〔2〕 博士の愛した数式　小川洋子著　新潮社
〔3〕 世にも美しい数学入門　藤原正彦・小川洋子著　ちくまプリマー新書
〔4〕 数学小辞典　共立出版株式会社

（東明館学園・玄界高校）