三角比の指導についての提案

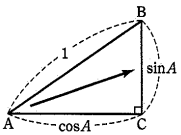
楠田（くすだ）　貴至（たかし）

§0．はじめに

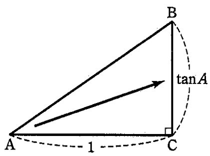
教科書の三角比の導入については，tan を先に導入するものから，最近は sin，cos，tan をまとめて導入するものまで色々である。いずれにせよ共通しているのは相似な直角三角形を並べて，どの三角形でも，斜辺，対辺，底辺の比が一定であることから始めている。それで生徒に，「sin って何？」と聞くと「斜辺分の対辺です」と答えて良しとしてきた風潮がある。私は以前より，「三角比というのは，ただ単に直角三角形の相似なんだ」ということで，拡大したり縮小したりすることを前面に押し出した指導を考え，実践している。

§1．定義

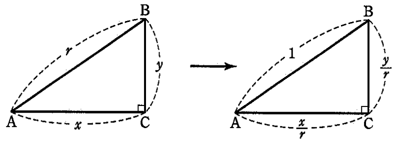
直角三角形で直角以外の角Aをつくる2辺は，1つは斜辺，もう1つは角Aの隣の辺なので「隣辺」と呼ぶことにする。そこで，大きいのも小さいのもたくさんある直角三角形の中で，斜辺が1の直角三角形 ABC において，角Aの対辺を，角Aのサインといい「$\sin A$」と表し，「隣辺」を，角Aのコサインといい，「$\cos A$」と表す，というように定義する。



次に，これまたたくさんある直角三角形の中で，「隣辺」が1の直角三角形 ABC で，角Aの対辺を，角Aのタンジェントといい「$\tan A$」と表す，と定義するのである。

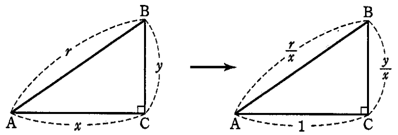


このように「定義」しておくと，辺の長さを角を用いて表す「角から辺への関数」としての三角比の理解が始められ，また次のように考えることにより普通の「定義」が理解しやすくなる。



> 左上の三角形で，斜辺を1にするために，すべての辺を r で割ると，右上の図になる

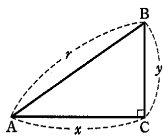
また，



> 左上の三角形で，辺 AC を1にするために，すべての辺を x で割ると，右上の図になる

したがって，最初の定義から下のようにまとめられる。

まとめ①　　左の図で，

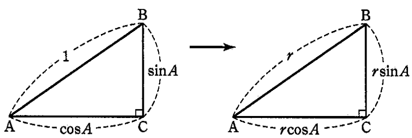


$$\sin A=\frac{y}{r}$$

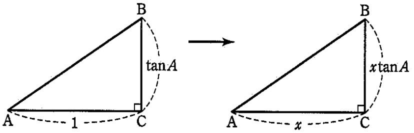
$$\cos A=\frac{x}{r}$$

$$\tan A=\frac{y}{x}$$

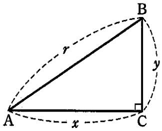
今度は逆に，左下の図で斜辺を r にするために，すべての辺を r 倍すると，



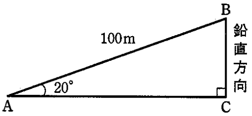
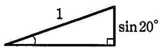
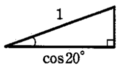
また左下の図で，辺 AC を x にするために，すべての辺を x 倍すると，

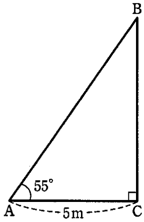
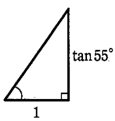


このようにして，次のまとめ②ができる。

> まとめ②
>
> 
>
>
> 左の図で，
> $y=r\sin A$
> $x=r\cos A$
> $y=x\tan A$

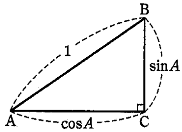
これによると，次のような問題が理解しやすい。

> 例　傾斜角 20° の坂をまっすぐに 100 m 登るとき，鉛直方向には何 m 登ったことになるか。
>
> 解答　左下の図において，BC は，斜辺＝1 の「モデル」で，sin 20° を 100 倍すれば求められる。
>
> ∴　BC＝100×sin 20°＝100×0.3420＝34.20 m
>
> 
>
>
> 
>
>
> 注　水平方向に進んだ距離は，同じ「モデル」で cos 20° を 100 倍すれば求められる。
>
> 
>

> 例　木の根元から 5 m 離れた地点に立って木の先端を見上げると，水平面とのなす角が 55° であった。目の高さを 1.6 m として木の高さを求めよ。
>
> 解答　左下の図において，目から上の木の高さ BC は，隣辺（底辺)＝1 の「モデル」で，tan 55° を 5 倍すれば求められる。
>
> 
>
>
> 
>
>
> ∴　BC＝5×tan 55°＝5×1.4281≒7.1 (m)
>
> ∴　(木の高さ)＝1.6＋7.1405≒8.7 (m)

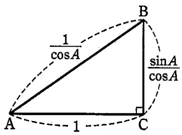
§2．三角比の相互関係

次に三角比の相互関係であるが，

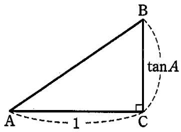


最初の「定義」であるこの図で，三平方の定理を用いると，まず $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ は明らかである。

次に，AC＝1 になるように，全部の辺を $\cos A$ で割ると，



となり，これが



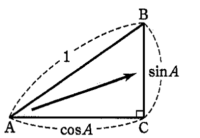
に等しいことから，$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ がわかる。次に，この直角三角形に三平方の定理を使うことで，

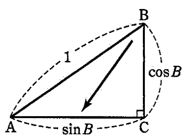
$1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ が出る。

> ①　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$
>
> ②　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$
>
> ③　$1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$

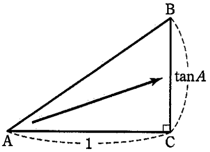
§3．余角の公式

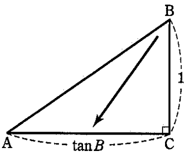
最初の定義にもどって，



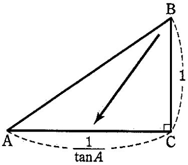


上の図から，$\sin B=\cos A$，$\cos B=\sin A$





左図で BC を 1 にするために，$\tan A$ で割る。



これが，右図に等しいことから

$\tan B=\dfrac{1}{\tan A}$ がわかる。

ここで，$B=90^\circ-A$ だから，

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(90^\circ-A)=\cos A,\ \cos(90^\circ-A)=\sin A,\\ \tan(90^\circ-A)=\dfrac{1}{\tan A}\end{array}}$$

が成り立つ。

§4．さいごに

このあと，鈍角の三角比に進むが，単位円を用いて再定義する時にも，最初の「定義」からだと導入がしやすいと思う。加えて，最近は中学校でアルファベットの筆記体を教えないそうであるから，従来よく知られた，直角三角形の辺に沿ってアルファベットをなぞって三角比を覚える「方法」にも無理が出てきている事情もあり，「斜辺＝1」「隣辺＝1」のモデルを使うのはいかがでしょうか。

《参考文献》

〔1〕 文部科学省検定済教科書　新編数学Ⅰ　数研出版

〔2〕 チャート式　基礎と演習　数学Ⅰ＋A　数研出版

(兵庫県立武庫荘総合高等学校)