入試問題研究

3つの解が循環する3次方程式

石野（いしの）　吉宏（よしひろ）

§1. はじめに

> 方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ について，次のことを証明せよ。　〔1997 東京都立大〕
> (1)　1つの解を α とするとき，α^2-2 も解である。
> (2)　1つの解を α とするとき，α，α^2-2，$(\alpha^2-2)^2-2$ は異なる3個の解を与える。

こういう問題は解けても少しも気持ちよくないんですよね。きっとこのタイプは有名なものなんだろうと思ってはいましたが，2006年の早稲田大学の問題で少し考える気になりました。これは代数の本かなにかに載っているのでしょうか？　ガロアの理論にも関係ありそうな。まあ，それを初等的に考えましたということです。

> $n=1, 2, \cdots$ に対して，x の整式
> $$P_n(x)=x^3-nx^2-(2n+12)x-8=0$$
> を考える。以下の問いに答えよ。
> (1)　3次方程式 $P_n(x)=0$ の正の実数解はただ1つであることを示せ。
> (2)　t が $P_n(x)=0$ の解であるとき，$P_n\left(-\dfrac{4}{t+2}\right)$ を求めよ。
> (3)　$P_n(x)=0$ の正の実数解を α_n とするとき，$P_n(x)=0$ の最小の実数解 β_n を α_n で表せ。さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta_n$ を求めよ。
> 〔2006 早稲田大，理工〕

3次方程式の解を循環に表現する式とでもいいますか，旺文社の全国大学入試問題正解によると，このての問題は1970年の東北大学で既に出題されているそうです。Studyaid D.B. は1996年からなので，それがどういう問題だったかわかりませんが。この本には「いくつかはこうなることが知られている」と書いてありましたので，では調べてみるかと考えたわけです。

§2. 解の置換と1次分数変換

さて，3回置換して元に戻るとくれば，1次分数変換から探そうかという気になります。

$f(t)=\dfrac{at+b}{ct+d}$ なる変換で3回やると初めて元に戻るものを求める。変換の計算は行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の計算とよく似ているので，これを利用して

$A^3=k^3E$ となるものを求める。トレースが $-k$，デターミナントが k^2 となればよい。$c=1$ としてよいので

$$A=\begin{pmatrix} a & -(a^2+ak+k^2) \\ 1 & -(a+k) \end{pmatrix}$$

でいくらもある。対応する変換は

t，$\dfrac{at-(a^2+ak+k^2)}{t-(a+k)}$，$\dfrac{-(a+k)t+(a^2+ak+k^2)}{-t+a}$

の3つ。このなかですべてかけて定数になるのは

$$a=0 \text{ つまり } \begin{pmatrix} 0 & -k^2 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \text{ と}$$

$$a=-k \text{ つまり } \begin{pmatrix} -k & -k^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

だけが出る。変換としては k の符号を変えると両者本質的には同じなので，前のものだけとしてよい。

$k=-1$，とすると t，$\dfrac{-1}{t+1}$，$\dfrac{t+1}{-t}$ の3つ。これらをすべて掛け合わせると1だから，方程式の定数項は -1 となる。方程式は

$$(x-t)\left(x+\frac{1}{t+1}\right)\left(x+\frac{t+1}{t}\right)=0$$

これを展開した x^2 の係数と x の係数を $-p$，q とそれぞれおくと $q=-p-3$ となる（p，q を t の媒介変数表示とみてグラフを書くソフトに入力したら，

なんと直線になってこの関係に気がついたわけですけど)。つまり方程式は

$$x^3-px^2-(p+3)x-1=0$$

となる。$p=-1$ が最初の東京都立大学の問題,

$$x^3+x^2-2x-1=0$$

他にも次のようにいくつもあります。

$$x^3-3x-1=0,$$
$$x^3+2x^2-x-1=0,$$
$$x^3+3x^2-1=0,$$
$$\cdots$$

そこで

$$x^3+x^2-2x-1=(x+1)(x^2-2)+1=0$$

より

$$\frac{-1}{x+1}=x^2-2$$

これで問題の中の x^2-2 が出て納得する。まだ

$$x^3+x^2-2x-1=x(x^2+x-2)-1=0$$

より

$$\frac{-(x+1)}{x}=-1-\frac{1}{x}=-x^2-x+1$$

という 2 次式もある。

$k=1$ とすると,t,$\frac{-1}{t-1}$,$\frac{t-1}{t}$ の 3 つ。掛け合わせて -1 なので方程式の定数項は 1 となる。

方程式は $(x-t)\left(x+\frac{1}{t-1}\right)\left(x-\frac{t-1}{t}\right)=0$

上と同様に $-p$,q と置くと方程式は

$$x^3-px^2+(p-3)x+1=0$$

となる。簡単にいうと上の t が $-t$ のとき。例えば

$$x^3-x^2-2x+1=0,$$
$$x^3-2x^2-x+1=0,$$
$$x^3-3x^2+1=0,$$
$$\cdots$$

$p=3$ のとき,$x^3-3x+1=x(x^2-3)+1=0$ より

$$\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}=1+x^2-3=x^2-2$$

で次の問題も納得できる。

> $x^3-3x+1=0$ について
> (1) この解で 1 より大きいものはただ 1 つであることを示せ。
> (2) 1 より大きいものを α とすると,$\beta=\alpha^2-2$,$\gamma=\beta^2-2$ のとき,$\gamma<\beta<\alpha$ を示せ。
> (3) β,α はこの方程式の解であることを示せ。

先の旺文社の本によると,これは早稲田大学の理工で過去に出題されたものです。

似たような問題を Studyaid D.B. で探すと,ありました。$k=1$ そのものです。

> m を定数とする。3 次方程式
> $x^3-mx^2+(m-3)x+1=0$ の 1 つの解を α とする。
> このとき,他の解をmを含まない α の式で表せ。
> 〔1997 広島修道大〕

2006 年の早稲田大学の入試問題は $k=2$ の場合です。t,$\frac{-4}{t+2}$,$\frac{-2(t+2)}{t}$ の 3 つ。上と同様に $-p$,q を置くとその関係は $q=-2p-12$ で,問題どおりです。あとは,$k=-2$ くらいが出そうですかね。

一般化しておきますか。

循環表示される t,$\frac{-k^2}{t-k}$,$\frac{k(t-k)}{t}$ の 3 つの解をもつ 3 次方程式は

$$(x-t)\left(x+\frac{k^2}{t-k}\right)\left(x-\frac{k(t-k)}{t}\right)=0$$

で,定数項は k^3。

この x^2 と x の係数を $-p$,q と置くと $q=kp-3k^2$ となる。すなわちその方程式は

$$x^3-px^2+k(p-3k)x+k^3=0$$

と表せる。

《参考文献》

〔1〕 2007 全国大学入試問題正解 旺文社
〔2〕 Studyaid D.B. 数研出版

(長野県屋代高等学校)