三角方程式・不等式の解法について

ー座標を利用してー

大関(おおせき)　浩二(こうじ)

§1．はじめに

三角関数が苦手な生徒は，この三角関数の解法に拒否反応を示してしまうものです。そこで，三角関数の方程式・不等式の解法で，座標（三角関数の定義）を用いて解く解法を考えてみました。

§2．普通の解法

【例題1】 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。
$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$

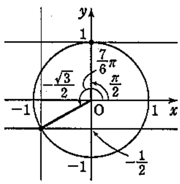
三角方程式 $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$ を解く方法は，相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて $\sin\theta$ を消去して $(\sqrt{3}\cos\theta + 1)^2 + \cos^2\theta = 1$

$4\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta = 0$

$2\cos\theta(2\cos\theta + \sqrt{3}) = 0$

から

$\therefore \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases}$ または



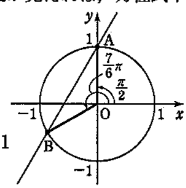
$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ です。

これらを同時に満たす θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲ではそれぞれ $\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi$ となります。

§3．座標を利用した解法

座標平面上の単位円で角度が見えれば，方程式や不等式が解けるので，初めから $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$ と置いて，座標を利用することができます。

方程式 $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$ は



連立方程式 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - \sqrt{3}x = 1 \end{cases}$ です。

これを解くと，円と直線の交点の座標は

$\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

よって，図より $\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi$

§4．他のタイプの問題

他のタイプの問題でも，座標を用いて解ける問題があります。

【例題2】 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。
$\sin 2\theta > \cos\theta$

この不等式 $\sin 2\theta > \cos\theta$ は2倍角の公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を代入して

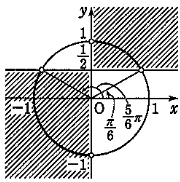
$2\sin\theta\cos\theta > \cos\theta$

よって

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) > 0$

これも，$\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$ と置いて

$x(2y - 1) > 0$



ゆえに，

$\begin{cases} x > 0 \\ y > \dfrac{1}{2} \end{cases}$ または $\begin{cases} x < 0 \\ y < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，$\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

§5．おわりに

【例題1】では，直線と x 軸のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ であり，$\triangle\mathrm{OAB}$ が二等辺三角形なので幾何の性質を使えば，座標を計算する必要もないことは言うまでもありません。

（新潟県立新潟江南高等学校）