約分したくない2次方程式の解の公式

楠田（くすだ）　貴至（たかし）

§0．はじめに

2次方程式の解の公式は，以下のように2つあるが，【公式2】の方は約分しなくてもよい（約分する手間が省ける）ものというように誤解していないであろうか。

> 【公式1】　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，
> $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

> 【公式2】　2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，
> $$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

教科書を見ると，『【公式1】で $b=2b'$ とおくと【公式2】が得られる』と書いてあるが，約分する手間が省けるとはどこにも触れていない。

にもかかわらず【公式1】と【公式2】の違いは，約分する手間が省けることであるかのように思われがちである。そこで，次の問題を見ていただきたい。

> 〚例1〛　$4x^2+8x+1=0$
> 【公式1】で解くと
> （解1）
> $$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\frac{-8\pm\sqrt{48}}{8}$$
> $$=\frac{-8\pm4\sqrt{3}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$$

で，当然のことながら，約分することになる。ところが，次に見るように【公式2】でやったところで同じこと，約分しないといけない。

> （解2）　$b'=4$ として，
> $$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{4}$$
> $$=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$$

この〚例1〛の場合，【公式1】で普通にやるのと【公式2】でやることの際立った違い（メリット）が感じられない。【公式2】を使ったところで結局，約分しなければならないのである。以下では，そのメリットについてではなく，あとで約分する必要のない解の公式の使い方について考えてみたい。

§1．【公式2】の検討

もとの2次方程式をk倍した2次方程式も同じ解を持ち，同じ解の公式が成り立つのは自明である。もちろん，kは整数に限るものではないが以下では，簡単のため各係数 a，b，c はそれぞれ互いに素な整数で，$a>0$ として話をすすめる。

> 【公式2′】　2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，$a=a''k^2$，$b'=b''k$ を満たす0でない数kに対して，$a''=\dfrac{a}{k}$，$b''=\dfrac{b'}{k}$，$c''=\dfrac{c}{k}$ とおくと
> $$x=\frac{-b''\pm\sqrt{b''^2-a''c''}}{a''}$$
> である。
> 特に，a''，b'' が整数となるような最大の整数kをとると，解は“既約”になる。

これで先の〚例1〛をもう一度みると，

> 〚例1〛　$4x^2+8x+1=0$
> （解3）　$a=4$，$b'=4$，$c=1$ で，$k=2$ の
> $a''=2$，$b''=2$，$c''=\dfrac{1}{2}$ として
> $$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\cdot\frac{1}{2}}}{2}$$
> $$=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$$

となる。

（注1）

$k=4$ の $a''=1$，$b''=1$，$c''=\frac{1}{4}$ としても

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot\frac{1}{4}}}{1}=-1\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$$

となるが，(約分は不要だが）これはどうであろうか。

（注2）

$16x^2+8x-1=0$ の場合，$b'=4$ であるから，最大の k ではない $k=2$ で $a''=8$，$b''=2$，$c''=-\frac{1}{2}$ とした場合には，

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{8}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{8}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{4}$$

のように，まだ約分ができてしまう。最大の k である $k=4$ で $a''=4$，$b''=1$，$c''=-\frac{1}{4}$ として，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+1}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{4}$$ とする。

（注3）

最大の整数 k というのは，もちろん正の数になるが，$|k|$ が最大であれば負の数でもかまわない。もっとも，公式の分母が負になるので正になおすと結局は同じことである。

§2．【公式1】の検討

x の係数が，2で割り切れない場合は，【公式1】を使うことになるが，このときも，もとの2次方程式を k 倍した2次方程式の解も同じで，同じ解の公式が成り立つ。

このことから，前項と同様に

> **【公式1′】** 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$a=a''k^2$，$b=b'k$ を満たす0でない数 k に対して，$a'=\frac{a}{k}$，$b'=\frac{b}{k}$，$c'=\frac{c}{k}$ とおくと
>
> $$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-4a'c'}}{2a'}$$
>
> 特に，a''，b' が整数となるような最大の k をとると，解は“既約”になる。

がいえる。

> **〖例2〗** $18x^2+3x-2=0$
>
> **（解1）** $$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot18\cdot(-2)}}{2\cdot18}$$
>
> $$=\frac{-3\pm\sqrt{9+144}}{36}$$
>
> $$=\frac{-3\pm\sqrt{153}}{36}$$
>
> $$=\frac{-3\pm3\sqrt{17}}{36}$$
>
> $$=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{12}$$

と普通するところを，

> **（解2）** $k=3$ の $a'=6$，$b'=1$，$c'=-\frac{2}{3}$ として
>
> $$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}}{2\cdot6}$$
>
> $$=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{12}$$

のようにすればよい。

k は最大のものをとるようにすることも，前項と同じである。

§3．おわりに

最初に，『【公式2】を使うことのメリットがないではないか』と言った。メリットはともかく，〖例1〗のような練習や問を教科書に載せてはどうだろうか。混乱のもとになる危険はあるとしても，今までと違った展開や見方を生徒に提起できて，面白いのではないかと思う。

《参考文献》

〔1〕 文部科学省検定済教科書　数学Ⅰ　数研出版

（兵庫県立武庫荘総合高等学校）