通信

教科書の内容に関するQ＆A

常日頃，先生方から教科書につきましていろいろなご質問をいただいております。このコーナーでは，お寄せいただきましたご質問の中から，主なものにつきまして，編集部からの回答をQ＆A形式で掲載させていただきました。今回は，

共役な複素数の表記

指数関数の導関数 と 対数関数の導関数 の順序

について，取り扱いました。

■共役な複素数の表記

Q. 1

共役な複素数の記号は，数研の教科書では扱われていないが，入試ではどのように扱われるのか何か情報があれば，教えて欲しい。

Ans. 1 まず，過去の入試問題の実例を調べたところ，以下の通りでした。

〔例1〕 複素数 $\alpha=a+bi$ (a, b は実数, i は虚数単位) に共役な複素数を $\overline{\alpha}=a-bi$ とする。

(1) ……以下略 〔91 帝塚山大〕

〔例2〕 方程式 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とする。

(1) a, b を実数とし，$z=a-b\omega$ とするとき，$z\overline{z}$ を a, b で表せ。ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数。

(2) ……以下略 〔91 早稲田大〕

〔例3〕 複素数 α, β と共役な複素数をそれぞれ $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 〔94 広島修道大〕

以上のように，共役の複素数の記号を用いる場合は，必ず断り書きが入っております。

また，これに関連して近年の入試問題を見ておりましても教科書で扱われていない記号を出題する際には，断り書きを示すのがほとんどです。例えば，

単位行列 I，ガウス記号 $[x]$，内積 $(\vec{a}, \vec{b})$ など

は断り書きが入っている場合が多いです。

ただ，入試問題を作成される大学の先生方が，指導要領の隅々まで熟読されたり，すべての教科書を熟知されたりして問題を作成するとは限りません。

したがいまして，断り書きなしで出題されることはないとは言い切れませんが，過去の事例を見る限り教科書で扱われていない記号を出題する場合は，何らかの断り書きがある可能性が高いと思われます。

■指数関数の導関数 と 対数関数の導関数 の順序

Q. 2

数学Ⅲでは，対数関数の導関数が指数関数の導関数よりも先に扱うようになっているが，数学Ⅱでは，指数から対数の順序に学習することになっている。数学Ⅲでは，なぜ対数関数の導関数が先になっているのでしょうか。

Ans. 2 指数関数，対数関数の導関数についての展開の仕方には，2通りの方法が考えられます。

[1] 指数関数から入る場合

① 曲線 $y=f(x)=a^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の傾きについて，$f'(0)=1$ となる a の値を e で表す。$f'(0)=1$ として $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

② 指数関数 $y=e^x$ の導関数 $(e^x)'=e^x$

③ 自然対数 $\log x$ の定義

④ 指数関数 $y=a^x$ の導関数

$(a^x)'=(e^{x\log a})'=e^{x\log a}\cdot\log a=a^x\log a$

⑤ 指数関数・対数関数に関する極限

関数 $f(x)=\log x$ において

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}=1$$

から $\displaystyle\lim_{h\to 0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}}=1$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

⑥ 対数関数 $y=\log x$, $y=\log_a x$ の導関数

$$(\log x)'=\frac{1}{x},\ (\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$$

[2] 対数関数から入る場合

① 対数関数 $y=\log_a x$ において

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

ここで，$(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の具体的な数値を参考にして $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を定義する。

② 自然対数の定義とその導関数

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\log a}$$

$a=e$ とおいて $(\log e^x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$

同時に $\log x$ の定義

③ 対数関数の導関数のまとめ

$$(\log x)'=\frac{1}{x},\ (\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$$

④ 指数関数の導関数

$$y=a^x \to \log y=x\log a$$

この両辺を x で微分して $\frac{y'}{y}=\log a$

すなわち $(a^x)'=a^x\log a$

特に，$a=e$ とすると $(e^x)'=e^x$

以前弊社の教科書では，[1] の展開をしておりました。しかし，[1] の展開では，

1．$f(x)=a^x$ について，$f'(0)$ の存在を仮定して $f'(x)=a^x f'(0)$ を導くことになり，e の存在が厳密には示されず，e の値が実感できないという物足りなさは残ります。

2．[1] の②～⑥では，指数関数と対数関数の処理が交錯してわかりにくいかと思います。

3．⑤で示したように $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ を改めて補足する必要があります。

一方，[2] の展開については，

1．[2] の導入部分は [1] より複雑で，わかりにくいのですが，$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ が早く導入できる。

2．[2] の②～④の流れが自然である。

3．対数の導関数，指数の導関数が整然と導入可能。

という良さがあります。このような理由により，弊社の数学Ⅲの教科書では，[2] の展開としております。

お詫びと訂正

数研通信 No. 53 の $p.29$ の 10 行目において

「最近では，出生年の順に名前を並べることが，一般的になっているようです。」

と掲載致しましたが，これにつきまして，ある高校の先生から

「最近の辞書をみてもケーリー・ハミルトンの定理と明記されているものがある。上記のことは本当でしょうか。」

とのご質問をいただきました。そこで，教科書の著者以外にもいろいろなお立場の先生に，改めてこの件につきましてお聞きしましたところ，

『定理がどのように構築されたかが重要です。一般には，先に発見した人の定理を次の人がその定理をさらに発展させて出来上がる場合が多く，発見した順になっているようですが，

①国によっては自国の人を先にする場合がある

②共同研究で発見した定理の場合は，地位の高い人を先にすることがある

等々のケースがあります。』

とのことでした。すなわち，結果的に出生年の順になることは多いかもしれませんが，「出生年の順に名前を並べることが，一般的になっている」とは必ずしも言い切れないことになります。

ここにお詫びして訂正させて頂きます。

尚，弊社発行の書籍では，岩波数学辞典に記述を合わせておりますので，「ハミルトン・ケーリーの定理」という記述にしております。