生徒の素朴な質問に思うこと(Ⅲ)
―数列の和の極限の問題から―

西元(にしもと)　教善(のりよし)

§0．はじめに

数研通信 No.53 に同様なタイトル「生徒の素朴な質問に思うこと～数列の極限の問題から～」を掲載していただいた。それは，類似した数列の極限の問題に対して，何故異なった対応方法を採るのかという生徒の質問に答えたものであった。しばらくして，数列の和の極限の問題でも同様な質問を受け，これに関連した入試問題を解かせている中で感じたことを今回はまとめてみた。

教える側としては，慣れ親しんでいるために当然のように採ってしまう方法が生徒にとって疑問となり，ときには躓(つまず)きの原因になることがある。

また，生徒から出されるこういった素朴な質問は，入試問題で出題される内容と教科書での取り扱いの間にあるギャップやその改善などについて考えさせられることもあり，教える側にとって指導上の貴重な糧(かて)ともなる。

§1．数列の和の極限

次のような極限を求める問題に対して，生徒はどのような方針で解こうとするであろうか。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots\cdots+n)$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\{\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\sqrt{n^2-3^2}+\cdots\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\}$

(1)(2)ともに数列の和の極限を求める問題であるが，「$\dfrac{1}{n^2}$ と数列の和の積」の極限と捉えることもできる。そこで，(1)では自然数の和の公式

$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ に着目して

$$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

と処理してしまう生徒も多いだろう。

では，(2)ではどうであろうか。

(1)の解法を踏襲して，{　}の中の和を先に計算しようとする者もいるだろう。つまり，(1)で $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$ を求めてうまくいったから味を占めて，(2)でも $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{n^2-k^2}$ を求めようというものであるが，この方針で悪戦苦闘し，挫折する答案に良く出会う。

では，これを次のように提示したらどうであろうか。

(1)′　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots\cdots+\frac{n}{n}\right)$

(2)′　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right\}$

さらには，

(1)″　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$

(2)″　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

とすれば，どうであろうか。

確かに(1)はかえって扱いづらくはなるが，(2)は解答の方向性がはっきりしてくる。なによりこれらは「数列の和の極限を定積分で求める」という共通性のある問題であることがわかるからである。

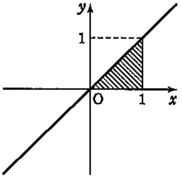
つまり，区分求積法による定積分(＊)

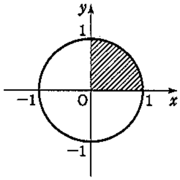
(＊)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

において，(1)は $f(x)=x$，(2)は $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ であり，図形的にいえば，それぞれ次図の斜線部の面積を求めていたことになる。

単に極限が求められればそれだけで O.K. という

のではなく，ちょっとした変形でそこに潜んでいる数学的現象を読み取らせたいものである。





§2．定積分は区分求積法から

積分は，微分をもとにその逆演算として導入される。つまり，$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ は，微分して $f(x)$ となる $f(x)$ の原始関数の1つである $F(x)$ を使って，$\int f(x)\,dx=F(x)+C$ と定義されている。

また，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は天下り式に $F(b)-F(a)$ で定義してもよいが，教科書では面積との関係を理解させようとして，次のように展開していることが多い。つまり，区間 $[a,\ b]$ で t 軸より上方にある曲線 $y=f(t)$ と y 軸に平行な2直線 $t=a,\ t=b$ および t 軸とで囲まれる図形の面積を S，曲線 $y=f(t)$ と2直線 $t=a,\ t=x\ (a\leqq x\leqq b)$ および t 軸とで囲まれる図形の面積を $S(x)$ とすると，$S(x)$ が $f(x)$ の原始関数になることや，$S=S(b)=S(b)-S(a)$ であることを基にして，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を $\int_a^b f(x)\,dx=S(b)-S(a)$ で定義するのである。一般的には，このことを踏まえて，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を使って，

$$(※)\quad \int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

と定義してある。

そこには，ある条件のもとでは，定積分は求積になることを理解させようという意図のもとで，場合によっては1ページ以上にも及ぶ説明があるものの，その反面生徒にはこれが十分に理解されないのが現状である。(中には，説明努力に報われないことから省略する教師さえもいる。)

生徒にとっては，その証明の方向性がわかりづらく，それに説得されてもそれを納得しづらいという現実がある。

本来，積分(integral)は「統合する」という意味で，区分求積法の「細かく分けて合体させる」ことに合い通じる。これを

『　$S(x+\Delta x)-S(x)=f(c)\Delta x\quad (x<c<x+\Delta x)$

となる c が存在するから，

$$\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(c)$$

したがって，$\Delta x\to 0$ とすると (左辺) $\to S'(x)$

また，$x<c<x+\Delta x$ より (右辺) $\to f(x)$

よって，$S'(x)=f(x)$

……　』

のように微分で展開すると，そこには微分(differential)が意味する「差」を考えることによって，面積の持つ「広がり」という感覚が感じづらくなるという欠点が生じてしまう。

何故，広域的なものを局所的な方向にもっていかなければならないのか，また，1つ1つの式をフォローできても証明全体が直接的でなく，もやもや感が晴れないと生徒は言うのである。やむなく，そこには $\int_a^b f(x)\,dx=S(b)-S(a)$ という結果だけを受け入れ，計算結果が合うことでよしとする姿勢が生まれてくる。

それに比べると，「区分求積法」は面積という「広がり」を反映している。昭和40年代後半で高校数学を学んだ我々の世代では，定積分の導入は，一般性という面では弱点はあるが，面積を求めることに深く関わっているという実感(これが大切)のある区分求積法によるものであった。

これは数列の和の公式を確認するよい機会でもあった。数列の和，それも自然数の和，平方数の和，立方数の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1),\quad \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

は，いろいろな場面で活用され重要度の高い公式であるが，特に定積分において，$\int_0^1 x\,dx$，$\int_0^1 x^2dx$，$\int_0^1 x^3dx$ を区分求積法で求める場面にも出現し，その意義が再確認されたものである。

いずれは，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を用いて(※)を定積分の定義として扱うし，また，その方が定積分

の性質の考察には便利であることや，$\int_0^1 x\,dx$，$\int_0^1 x^2dx$，$\int_0^1 x^3dx$ のような個々の定積分のために自然数の和，平方数の和，立方数の和の公式を持ち出して，区分求積をすることは二度手間であって，削減された授業時間数でそのような時間的余裕はないということもよくわかる。しかし，一見無駄と思えるようなことの中に，実は生徒にとっては理解しやすいとか定着しやすいとかの利点が潜んでいることがあるのではなかろうかと思う。

§3．入試問題から

平成17年度入試において，この区分求積法に関わる問題として，山口大学から(3)のような極限を求めさせる問題が出された。

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\{\sqrt{(2n)^2-1^2}+\sqrt{(2n)^2-2^2}+\sqrt{(2n)^2-3^2}+\cdots\cdots+\sqrt{(2n)^2-(2n-1)^2}\}$$

これについては，(1)，(2)と同様に「$\frac{1}{n^2}$ と数列の和の積」の極限であり，特に(2)と酷似しているから，

$$(3)'\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt{4-\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\sqrt{4-\left(\frac{2n}{n}\right)^2}\right\}$$

とする生徒も多いであろう。確かに，見かけは(＊)に似てはいるが，実際には，(3)′は，

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ (ただし，$f(x)=\sqrt{4-x^2}$) であり，

(2)のように $\int_0^1 f(x)\,dx$ では求められない。

(＊)については，多くの教科書では，(＊)′という扱いまではしてあるようであるが，このままでは(3)には対処できない。

$$(＊)'\quad \begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\\ &\qquad\left(\text{あるいは}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\ &=\int_0^1 f(x)\,dx\end{aligned}$$

$$(＊＊)\quad \lim_{N\to\infty}\frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(a+\frac{b-a}{N}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

(＊)は(＊＊)の特例であるが，教科書でこれまで扱うことは少なくなった。その考え方のポイントは次のとおりである。

まず区間$[a,\ b]$をN等分し，横と縦の長さがそれぞれ$\frac{b-a}{N}$ と $f\left(a+\frac{b-a}{N}k\right)$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N$) である小長方形を考えて，次にそれらの面積の和によって区間$[a,\ b]$でx軸より上方にある曲線 $y=f(x)$ とy軸に平行な2直線 $x=a$，$x=b$ およびx軸とで囲まれる図形の面積 $\left(=\int_a^b f(x)\,dx\right)$ を近似する。そこには，近似の面積が数列の和として表れる。最後に$N\to\infty$ とすることで，数列の和の極限が面積を表している定積分として求められる。

そこには，階段状に描かれた近似の図の面積が数列の和として，また，曲線と3本の直線で囲まれた図形の面積が定積分として，しっかりイメージされて(＊＊)が成り立つことが「なるほど！」と思えるものである。この経験がなければ問題(2)(3)は解きづらいというか，取り付く島がないであろう。

(3)は，(＊＊)において

$$a=0,\ b=2,\ N=(b-a)n=2n$$

の場合であり，一般的には次の(＊＊＊)が成り立つ。

$$(＊＊＊)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{mn}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^m f(x)\,dx \quad (m\text{ は自然数})$$

【証明①】 幅mの区間$[0,\ m]$を$N\ (=mn)$等分して区分求積する。

小長方形の横の長さは $\frac{1}{N}=\frac{m}{mn}=\frac{1}{n}$，

縦の長さは $f\left(\frac{k}{n}\right)$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ mn$)

であるから，近似の面積は $\sum_{k=1}^{mn}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ となる。

また，曲線と3本の直線で囲まれた図形の面積は $\int_0^m f(x)\,dx$ であり，

$N\to\infty \Leftrightarrow n\to\infty$ より

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{mn}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^m f(x)\,dx$ ■

【証明②】 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{mn}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}f\left(l+\frac{k}{n}\right)$

$$=\sum_{l=0}^{m-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(l+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\sum_{l=0}^{m-1}\int_{l}^{l+1}f(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{m}f(x)\,dx$$

というように幅1の区間$[l,\ l+1]$をn等分して，(**)を適用することで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(l+\frac{k}{n}\right)=\int_{l}^{l+1}f(x)\,dx$$

を導いておき，あとは定積分の性質

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{b}f(x)\,dx$$

を使って，(***)を得る。■

§4．おわりに

区分求積法で定積分を導入しておけば，数列の和の極限を定積分で求めることに抵抗感は少ないし，視覚的なイメージを土台にして①②のような証明もできる。

「微分のことは微分でせよ」というのは高木貞治の有名な言であるが，これに逆らって，「積分(の導入)を微分でせよ」というのは生徒にとってはわかりづらいことかもしれない。微分の逆演算としての定積分を導入することよりも先に区分求積法で数列の和の極限として定積分を導入しておく方が生徒にとってわかりやすく，しかも定着しやすいのではなかろうか。

(**)において $\dfrac{b-a}{N}=\Delta x,\ x_k=a+(\Delta x)k$

とおけば，

$$\boxed{(**)'\quad \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)\Delta x=\int_{a}^{b}f(x)\,dx}$$

である。(**)′はΣ(総和)が$\int$(積分)に，Δx(小長方形の横の長さ)がdxに対応することで，式の上からも定積分$\int_a^b f(x)\,dx$の図形的な意味が読み取れる。生徒に言わせれば，これは直接的な表現，ただし，計算は面倒。一方，(※)は原始関数を介在させるので間接的な表現，ただし，計算は((**)′に比較すれば)簡単というのである。

このような1つの概念を，複数の定義によって，それぞれの長所，短所を見極めるということも数学学習にとっては大切であろう。単に，問題が速く正確に解けて高得点を得るという作業的な勉強に終始するよりも意義深いのではなかろうかと思われる。

積分は数学IIで，数列は数学Bで扱うという履修上の問題や，より一般性のある定義の方が合理的という理由もわからないわけではないが，生徒の納得や定着を図れるような構成順序にするべきであろう。数学IIIの定積分の最後辺りで，数列の和の極限を扱う際についでのように「区分求積法」に触れるのではなく，もっと日の当たる場で扱うべきである。

数列の極限は数学IIIで扱うから，文系の生徒には「区分求積法」は学習できない。「区分求積法」の発想による「定積分」の方が肌に合う生徒がその中にいるかもしれない。そう思うと残念でもある。

蛇足ながら，入試問題(3)を本校の生徒に解かせたところ案の上出来具合は芳しくなかった。教科書で扱っているのが(*)′であり，それ以上の説明を授業でもしていないため止むを得ないと思うが，その補足の意味を込めて(**)(**)′(***)について説明したところ多くの生徒の理解が深まった。いや「理解」というよりは寧ろ「納得」したという感じであった。安易に迎合するという意味ではなく，生徒の理解のしやすさ，定着のよさを念頭に置いた教科書作りができるよう期待したい。

《参考文献》

〔1〕 2006年受験用　全国大学入試問題正解　数学(国公立大編)p.346　旺文社　2005

〔2〕 西元教善　生徒の素朴な質問に思うこと―数列の極限の問題から―　数研通信 No.53

〔3〕 西元教善　数学学習における『理解』の構造　低学力時代における意味と意義　太陽書房　2002

〔4〕 西元教善　スーパーサイエンスハイスクール数学分野の実践記　～数学が「わかる」ことを求めて～　太陽書房　2006

〔5〕 西元教善　数学が「わかる」ことを求めて　～興味，関心，メタ理解を中心にして～　第55回読売教育賞優秀賞受賞論文　2006

(山口県立岩国高等学校)