マチンの公式を導いてみる

深谷（ふかや）　茂樹（しげき）

§0．はじめに

円周率をコンピュータを用いて求めるときに使われるもっとも有名な公式はマチンの公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

である。この公式は，タンジェントの加法定理を用いて証明できるが，導くことはできるだろうかと思い，考えたことをここにまとめた。

ここでは，$\frac{\pi}{4}=a\arctan\frac{1}{k}+b\arctan\frac{1}{l}$　…(*)

となるような0以外の整数 a，b と2以上の整数 k，l を見つけたい。特に計算しやすいように，ここでは $b=\pm1$ のときのみを考えた。

§1．マチンの公式について

円周率を求める方法はいくつかあるが，マチンの公式の背景は次の通りである。

$\tan\frac{\pi}{4}=1$ であるから $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ である。

$\arctan x$ を無限級数に展開すると

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots\cdots$$

となるから，$x=1$ とおけば $\frac{\pi}{4}$ が得られるが，このままでは収束が遅い。x の値が0に近いほど収束が速いので，マチンの公式のような arctan の組み合わせが考えられた。この組み合わせは無数にあるが，そのいくつかは次の通りである。

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

$$5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79}=\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$12\arctan\frac{1}{18}+8\arctan\frac{1}{57}-5\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

§2．ピタゴラスの三角形とマチンの公式

(1)　$a=1$，$b=\pm1$ のとき

$\tan\alpha=\frac{1}{k}$，$\tan\beta=\frac{1}{l}$ とする。

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ となるのは，$\tan(\alpha+\beta)=1$ より

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

$$\frac{\frac{1}{k}+\frac{1}{l}}{1-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{l}}=1$$

$$kl-1=l+k$$

$$(k-1)(l-1)=2$$

と変形できるから

$$(k,\ l)=(3,\ 2),\ (2,\ 3)$$

よって

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ となるのは，$\tan(\alpha-\beta)=1$ より

$$kl+1=l-k$$

これを満たす k，l は存在しない。

(2)　$a=2$，$b=\pm1$ のとき

【定理1】 u，v，w は2以上の整数であり，さらに u，v は互いに素であり，その一方は奇数，他方は偶数であるとき，

$$\arctan\frac{v}{u}+\arctan\frac{1}{w}=\frac{\pi}{4}$$

となるのは，

$u-v=1$，$w=u+v$

のときである。

また，

$$\arctan\frac{v}{u}-\arctan\frac{1}{w}=\frac{\pi}{4}$$

となるのは，

$u-v=-1$，$w=u+v$

のときである。

(証明)

$\tan\alpha=\frac{v}{u}$，$\tan\beta=\frac{1}{w}$ とする。

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ となるのは，$\tan(\alpha+\beta)=1$ より

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

よって $$\frac{\frac{v}{u}+\frac{1}{w}}{1-\frac{v}{u}\cdot\frac{1}{w}}=1$$

整理すると　$w(u-v)=u+v$

$u-v$，$u+v$ は互いに素であるから

$u-v=1$，　$w=u+v$

となる。

また，$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ となるのは，同様にして

$u-v=-1$，$w=u+v$ となる。■

【定理 2】 m，n が互いに素な自然数であるとき，$\tan\alpha=\frac{n}{m}(m>n)$ であれば，1つの鋭角が 2α である直角三角形はピタゴラスの三角形である。
また，その3辺の長さの比は
$m^2-n^2:2mn:m^2+n^2$ である。

ピタゴラスの三角形とは，3辺の長さが整数で表される直角三角形のことである。

(証明)

$\tan\alpha=\frac{n}{m}(m>n)$ であれば

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{n}{m}}{1-\frac{n^2}{m^2}}=\frac{2mn}{m^2-n^2}$$

また，3辺の長さが m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2 である三角形は

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

が成り立つから，ピタゴラスの定理より直角三角形である。■

この定理でわかるように，1つの鋭角が α である直角三角形の斜辺の長さは $\sqrt{m^2+n^2}$ であるのに対して，1つの鋭角が 2α である直角三角形の斜辺の長さは m^2+n^2 となり，$\sqrt{m^2+n^2}$ の平方になっている。

【定理 3】 1つの鋭角が 2α であるピタゴラスの三角形において，$\tan 2\alpha=\frac{l}{k}$ (k，l は互いに素な自然数)とすると，$\tan\alpha$ は有理数である。
(ピタゴラスの三角形においては k，l の一方は奇数，他方は偶数である)

(証明)

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ より　$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{l}{k}$

整理して

$l\tan^2\alpha+2k\tan\alpha-l=0$

これを解いて

$$\tan\alpha=\frac{-k\pm\sqrt{k^2+l^2}}{l}$$

仮定より $\sqrt{k^2+l^2}$ は整数であるから，$\tan\alpha$ は有理数である。■

正の $\tan\alpha$ の値は $\frac{-k+\sqrt{k^2+l^2}}{l}$ である。

具体例

3辺の長さが8，15，17の三角形はピタゴラスの三角形である。

$\tan 2\alpha=\frac{8}{15}$ とすると，正である $\tan\alpha$ の値は，

$$\tan\alpha=\frac{-15+\sqrt{8^2+15^2}}{8}=\frac{-15+17}{8}=\frac{1}{4}$$

である。

つまり，$\arctan\frac{8}{15}=2\arctan\frac{1}{4}$ が成り立つ。

定理1を考慮して，直角をはさむ2辺の長さが連続する2整数であるピタゴラスの三角形を使ってみる。

(i)　3辺の長さが3，4，5であるピタゴラスの三角形を考える。

$\tan 2\alpha=\frac{3}{4}$ のとき

$$\tan\alpha=\frac{-4+5}{3}=\frac{1}{3}$$

よって，

$$2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

$\tan 2\alpha=\frac{4}{3}$ のとき

$$\tan\alpha=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$$

よって，

$$2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

(ii) 3辺の長さ 20，21，29 であるピタゴラスの三角形を考える。

$\tan 2\alpha=\frac{20}{21}$ のとき

$$\tan\alpha=\frac{-21+29}{20}=\frac{2}{5}$$

よって，

$$2\arctan\frac{2}{5}+\arctan\frac{1}{41}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

$\tan 2\alpha=\frac{21}{20}$ のとき

$$\tan\alpha=\frac{-20+29}{21}=\frac{3}{7}$$

よって，

$$2\arctan\frac{3}{7}-\arctan\frac{1}{41}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

(3) $a=4$，$b=\pm 1$ のとき

3辺の長さが 119，120，169 であるピタゴラスの三角形を考える。$169=13^2$ であるから，$a=4$ のときの式が求められる可能性が考えられる。

$\tan 4\alpha=\frac{119}{120}$ のとき

$$\tan 2\alpha=\frac{-120+169}{119}=\frac{49}{119}=\frac{7}{17}$$

このとき $\tan\alpha$ は有理数とはならない。

$\tan 4\alpha=\frac{120}{119}$ のとき

$$\tan 2\alpha=\frac{-119+169}{120}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

3辺の長さが 5，12，13 のピタゴラスの三角形が存在するから，

$$\tan\alpha=\frac{-12+13}{5}=\frac{1}{5}$$

よって

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

以上より，ここまでで条件(＊)を満たす式は

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

である。第4の式がマチンの公式である。

§3．複素数とマチンの公式

(＊)の式は，複素数を考えると

$$(k+i)^a(l+i)^b=r(1+i) \quad \cdots\cdots①$$

と同値である。

ここで，$(k+i)^a=r_1(A+Bi)$，$(l+i)^b=r_2(C+Di)$ (A，B は互いに素な整数，C，D は互いに素な整数)とすると，

$$\begin{aligned}(k+i)^a(l+i)^b&=r_1r_2(A+Bi)(C+Di)\\&=r_1r_2\{(AC-BD)+(BC+AD)i\}\end{aligned}$$

であるから，①が成り立つには，

$AC-BD=BC+AD$ でなければならない。

変形して，$C(A-B)=D(A+B)$ となる。

ここでは $b=\pm 1$ の場合だけを考える。$A\geqq 2$，$B\geqq 2$ で A，B の一方が奇数，他方が偶数のときは $A+B$ と $A-B$ は互いに素である。したがって，$b=1$ のときは $C=l$，$D=1$ であるから，$A+B=l$，$A-B=1$ となる。また，$b=-1$ のときは $C=l$，$D=-1$ であるから，$A+B=l$，$A-B=-1$ となる。

(1) $a=1$，$b=\pm 1$ のとき

このときは，$B=1$ であるので上記のことは使えない。

$b=1$ のとき

$A=k$，$B=1$，$C=l$，$D=1$ より，

$AC-BD=BC+AD$ に代入して

$$kl-1=l+k$$

$(k-1)(l-1)=2$ と変形できるから，整数 k，l の組は $(k, l)=(3, 2)$，$(2, 3)$

よって，

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

$b=-1$ のとき

$A=k$, $B=1$, $C=l$, $D=-1$ より，

$AC-BD=BC+AD$ に代入して

$$kl+1=l-k$$

これを満たす整数 k, l は存在しない。

(2) $a=2$, $b=\pm1$ のとき

$$(k+i)^2=(k^2-1)+2ki$$

(i) k が偶数のとき

k^2-1 は奇数，$2k$ は偶数である。

$b=1$ のとき

$(k^2-1)+2k=l$, $(k^2-1)-2k=1$ より，これを満たす整数 k, l は存在しない。

$b=-1$ のとき

$(k^2-1)+2k=l$, $(k^2-1)-2k=-1$ より，

$$k=2,\ l=7$$

よって，

$$2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

(ii) k が奇数のとき

k^2-1, $2k$ はともに2の倍数であるが，$2k$ は4の倍数ではない。よって，

$$(k^2-1)+2ki=2\left(\frac{k^2-1}{2}+ki\right)$$

と表せる。

$b=1$ のとき

$\dfrac{k^2-1}{2}+k=l$, $\dfrac{k^2-1}{2}-k=1$ とすると

$$k=3,\ l=7$$

よって，

$$2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

$b=-1$ のとき

$\dfrac{k^2-1}{2}+k=l$, $\dfrac{k^2-1}{2}-k=-1$ とすると

$$k=1,\ l=1$$

よって，

$$2\arctan\frac{1}{1}-\arctan\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$$

となり，自明の式である。

(3) $a=3$, $b=\pm1$ のとき

$$(k+i)^3=(k^3-3k)+(3k^2-1)i$$

(i) k が偶数のとき

k^3-3k は偶数，$3k^2-1$ は奇数である。

$$(k^3-3k)+(3k^2-1)=l,$$
$$(k^3-3k)-(3k^2-1)=\pm1$$

とすると，これを満たす整数 k, l は存在しない。

(ii) k が奇数のとき

k^3-3k, $3k^2-1$ はともに2の倍数であるが，k^3-3k は4の倍数ではない。

よって

$$(k^3-3k)+(3k^2-1)i=2\left(\frac{k^3-3k}{2}+\frac{3k^2-1}{2}i\right)$$

と表せる。

$$\frac{k^3-3k}{2}+\frac{3k^2-1}{2}=l,$$

$\dfrac{k^3-3k}{2}-\dfrac{3k^2-1}{2}=\pm1$ とすると，

これを満たす k, l は存在しない。

(4) $a=4$, $b=\pm1$ のとき

$$(k+i)^4=(k^4-6k^2+1)+(4k^3-4k)i$$

(i) k が偶数のとき

k^4-6k^2+1 は奇数，$4k^3-4k$ は偶数である。

$$(k^4-6k^2+1)+(4k^3-4k)=l,$$
$$(k^4-6k^2+1)-(4k^3-4k)=\pm1$$

とすると，これを満たす整数 k, l は存在しない。

(ii) k が奇数のとき

k^4-6k^2+1, $4k^3-4k$ はともに4の倍数であるが，k^4-6k^2+1 は8の倍数ではない。よって

$$(k^4-6k^2+1)+(4k^3-4k)i=4\left\{\frac{k^4-6k^2+1}{4}+(k^3-k)i\right\}$$

と表せる。

$b=1$ のとき

$$\frac{k^4-6k^2+1}{4}+(k^3-k)=l,$$
$$\frac{k^4-6k^2+1}{4}-(k^3-k)=1$$

とすると，これを満たす整数 k, l は存在しない。

$b=-1$ のとき

$$\frac{k^4-6k^2+1}{4}+(k^3-k)=l,$$

$$\frac{k^4-6k^2+1}{4}-(k^3-k)=-1$$

とすると，これを満たす整数 k は $k=5$ であり，$l=239$ となる。

よって

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。

以上より，ここまでで条件(＊)を満たす式は

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

である。第4の式がマチンの公式である。

§4．おわりに

マチンの公式を導くとすれば，タンジェントの加法定理を使うことがすぐ思い浮かぶが(複素数と結びつけて考えても本質的には同じ)，参考文献〔1〕を読んでいたときに，3辺の長さが119，120，169であるピタゴラスの三角形があることを知り，前半の事柄を思いついた。マチンの公式については，239という数はどのようにしたら導けるだろうかと考えていたが，予想しなかった事実と結びつき，大変興味深かった。

《参考文献》

〔1〕 シェルピンスキー(銀林　浩　訳)　ピタゴラスの三角形　東京図書

〔2〕 ジャン=ポール・ドゥラエ(畑　政義　訳)　π―魅惑の数―　朝倉書店

(福島県立橘高等学校)