αが解ならば$\overline{\alpha}$も解であることの高校生にもわかる証明

森(もり)　茂(しげる)

§1　定理の紹介

正確に述べると次のようになる定理がある。

> $P(x)$を実数係数の多項式とする。
> αが $P(x)=0$ の解ならばその共役複素数$\overline{\alpha}$も解である。

と，いうものである。大学入試の受験科目に数学がある受験生なら，是非とも知っておいてほしい定理であるが，よく知られている証明は高校生にはわかりにくい。よく知られている証明というのは次のような手順による証明である。

① $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ と $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ を示す。

② $\overline{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}=\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}+\cdots+\overline{\alpha_n}$ と $\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$

を示す。

③ $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0)$

とおき，

$$\begin{aligned}P(\overline{\alpha})&=a_n\overline{\alpha^n}+a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0\\&=\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0}\\&=\overline{P(\alpha)}=\overline{0}=0\end{aligned}$$

一般の多項式について証明するために，

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

とおかなければならないことが，証明をわかりにくくしている。また，②を示すためには，厳密には数学的帰納法が必要である。

§2　新しい証明方法

そこで，次のような証明を考案した。

> **step I**
> $P(x)$を実数係数の多項式とする。
> αが実数のとき，
> $P(\alpha)=0$ ならば，$P(\overline{\alpha})=0$

証明

αが実数のとき $\overline{\alpha}=\alpha$ であるから

$P(\overline{\alpha})=P(\alpha)=0$

> **step II**
> $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$は 2 次の実数係数の多項式である。

証明

$\alpha=p+qi$ (p，q は実数) とおくと

$$\begin{aligned}&x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\\&=x^2-\{(p+qi)+(p-qi)\}x+(p+qi)(p-qi)\\&=x^2-2px+p^2+q^2\end{aligned}$$

> **step III**
> $P(x)$を実数係数の多項式，αを虚数とする。
> $P(\alpha)=0$ ならば，
> $P(x)$は $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$
> で割り切れる。

証明

$P(x)$を $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$ で割ったときの商を $Q(x)$ 余りを $ax+b$ とおくと，**実数係数の多項式を実数係数の多項式で割る割り算であるから，$Q(x)$ も $ax+b$ も実数係数の多項式である。**

ゆえに，a，b は実数である。

割り算の原理によって，

$P(x)=(x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha})Q(x)+ax+b$

とおける。

$\therefore$　$P(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})Q(x)+ax+b$

xにαを代入すると

$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)(\alpha-\overline{\alpha})Q(\alpha)+a\alpha+b$

仮定より $P(\alpha)=0$ であるから $a\alpha+b=0$

ゆえに，$a=0$

$\left(\begin{array}{l}\text{なぜなら，}a \neq 0\text{ とすると }a\alpha+b=0\text{ より，}\\ \alpha=-\dfrac{b}{a}\text{ となるが，左辺は虚数で右辺は実数}\\ \text{であるから矛盾する。}\end{array}\right)$

よって，$b=0$

したがって，$P(x)$ は $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$ で割り切れる。

step Ⅳ

$P(x)$ を実数係数の多項式とする。
α が $P(x)=0$ の解ならば，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解である。

証明

［1］ α が実数のとき

α が $P(x)=0$ の解であるから $P(\alpha)=0$

ゆえに，step Ⅰ によって $P(\overline{\alpha})=0$

よって，$\overline{\alpha}$ も $P(x)=0$ の解である。

［2］ α が虚数のとき

α が $P(x)=0$ の解であるから $P(\alpha)=0$

ゆえに，step Ⅲ によって $P(x)$ は $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$ で割り切れる。

ゆえに，

$$P(x)=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}Q(x)$$

（$Q(x)$ は実数係数の多項式）

とおける。

$\therefore\ P(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})Q(x)$

よって，$P(\overline{\alpha})=0$

したがって，$\overline{\alpha}$ も $P(x)=0$ の解である。

［3］ ［1］,［2］より，α が実数・虚数いずれの場合も，α が $P(x)=0$ の解ならば，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解である。

§3 おわりに

この証明法は，わかりやすく，途中に出てくる step Ⅲ も役に立つことがあるので，優れていると思うのだが，いかがなものだろうか。

（福井県立武生高等学校）