中線定理について

吉田　亮介

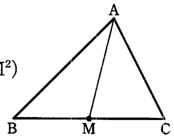
§1　はじめに

数学IIの図形と方程式で扱われる「中線定理」についていくつかの考察をしてみたいと思います。

§2　定理について

△ABC の辺 BC の中点をMとすると，次式が成立する。

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

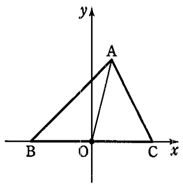


§3　証明について

一般的に教科書では，単元の趣旨に合わせて次のような座標軸設定による証明を紹介しています。

(1)　座標軸設定による証明

線分 BC の中点を原点Oとし，3点 A，B，C の座標をそれぞれ $(a,\ b)$，$(-p,\ 0)$，$(p,\ 0)$ とする。ただし $p>0$ とする。



左辺 $=AB^2+AC^2$

$=\{(a+p)^2+b^2\}+\{(a-p)^2+b^2\}$

$=2(a^2+b^2+p^2)$

右辺 $=2(AO^2+BO^2)=2\{(a^2+b^2)+p^2\}$

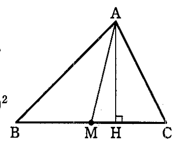
$=2(a^2+b^2+p^2)$

よって，与式は成立する。終

(2)　初等幾何的手法による証明

(case 1) △ABC が鋭角三角形の場合

Aから線分 BC に垂線をおろし，その足をHとする。



$AB^2=AH^2+BH^2$

$AB^2=AH^2+(BM+MH)^2$

$AB^2=AH^2+BM^2+2BM\cdot MH+MH^2$　……①

次に

$AC^2=AH^2+CH^2$

$AC^2=AH^2+(CM-MH)^2$

$AC^2=AH^2+CM^2-2CM\cdot MH+MH^2$　……②

①+② から

$AB^2+AC^2=2AH^2+2BM^2+2MH^2$

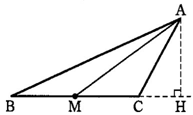
$(\because\ BM=CM)$

$AB^2+AC^2=2(AH^2+MH^2)+2BM^2$

$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

(case 2) △ABC が鈍角三角形の場合



$AB^2=AH^2+BH^2$

$AB^2=AH^2+(BM+MH)^2$

$AB^2=AH^2+BM^2+2BM\cdot MH+MH^2$　……①

次に

$AC^2=AH^2+CH^2$

$AC^2=AH^2+(MH-CM)^2$

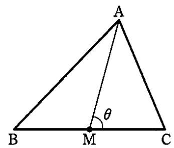
$AC^2=AH^2+MH^2-2CM\cdot MH+CM^2$　……②

以下 ①+② を計算して $BM=CM$ を適用すれば (case 1) と同様に示される。終

(3)　余弦定理を用いる証明

$\angle AMC=\theta$ とする。

△AMC に余弦定理を適用して



$AC^2=AM^2+CM^2-2AM\cdot CM\cos\theta$　……①

△AMB に余弦定理を適用して

$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos(180°-\theta)$

$AB^2=AM^2+BM^2+2AM\cdot BM\cos\theta$　……②

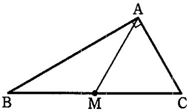
①+② より

$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$　$(\because\ BM=CM)$

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$　終

§4　直角三角形における中線定理について

△ABC が直角三角形のときは中点Mは△ABCの外心になるので



$AM=BM=CM$　…①

が成り立ちます。ここで中線定理を適用すると

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)=4BM^2$　（∵　①）

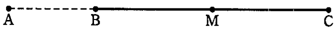
$=(2BM)^2=BC^2$

となり，ピュタゴラスの定理そのものになります。

§5　3点A，B，Cが一直線上にある場合

このときにも中線定理は成立します。以下のように示されます。

(case 1) 点Aが線分 BC 上にない場合



$AB^2=(AM-BM)^2=AM^2-2AM\cdot BM+BM^2$

$AC^2=(AM+CM)^2=AM^2+2AM\cdot CM+CM^2$

よって

$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$　（∵　$BM=CM$）

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

(case 2) 点Aが線分 BC 上にある場合

$AB^2=(BM-AM)^2=BM^2-2AM\cdot BM+AM^2$

$AC^2=(AM+CM)^2=AM^2+2AM\cdot CM+CM^2$

よって

$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$　（∵　$BM=CM$）

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

この考察からわかることは以下のようになります。

中線定理は，点Aの位置によらず成立する

表現を変えれば，前提として△ABC の成立がなくとも中線定理は成立するということになります。

§6　中線定理から導かれる平行四辺形の性質

▱ABCD において，辺 AB，辺 BC，辺 CD，辺 DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とするとき以下の性質が導かれます。

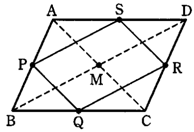
(性質 1）$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

$=2(PQ^2+QR^2+RS^2+SP^2)$

(性質 1）について

△ABC に中線定理を適用すると

$AB^2+BC^2=2(BM^2+AM^2)$



AB^2+BC^2

$=2BM^2+2AM^2$

AB^2+BC^2

$=BM^2+DM^2$

$+AM^2+CM^2$

（∵　$BM=DM$，$AM=CM$）

両辺を2倍して

$2(AB^2+BC^2)=2(AM^2+BM^2+CM^2+DM^2)$

……①

①の左辺は

$2(AB^2+BC^2)=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

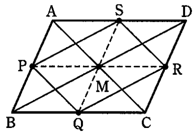
①の右辺は　中点連結定理より

$AM^2=PQ^2$, $BM^2=QR^2$, $CM^2=RS^2$, $DM^2=SP^2$

よって（性質 1）の等式が成立する。終

(性質 2）$AC^2+BD^2=2(PR^2+QS^2)$

(性質 2）について



$AC^2=(2PQ)^2=4PQ^2$

$BD^2=(2PS)^2=4PS^2$

より

AC^2+BD^2

$=4(PQ^2+PS^2)$　……①

△PQS に中線定理を適用すると

$PQ^2+PS^2=2(PM^2+QM^2)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{2}PR\right)^2+\left(\frac{1}{2}QS\right)^2\right\}$

$\left(\because\quad PM=\frac{1}{2}PR,\ QM=\frac{1}{2}QS\right)$

$=\frac{1}{2}(PR^2+QS^2)$　……②

②を①に代入すると（性質 2）の等式が得られる。

（参考　この性質 2 は一般の四角形ABCDでも成立する）

§7　終わりに

私自身がそうだったのですが，従来この中線定理を扱うときは教科書に記載されている証明を紹介した後，そのまま掘り下げもせずに終わらせていました。

しかし，今回調べていくことによって，なかなか美しい事項を秘めていることを認識しました。

《参考文献》

〔1〕 理系数学の原点 Vol.1　諸橋実著　河合出版

（北海道浜頓別高等学校）