「三角関数の恒等式」についての一考察

米江（よねえ）　慶典（よしのり）

§0　はじめに

高等学校における「恒等式」の学習内容は比較的軽く扱われています。特に，「三角関数の恒等式」についてはほとんど記述がありません。ここで，少し考えてみたいと思います。

§1　準備

まずは，定義と基礎的な定理を準備します。特に，定理1は直観的に明らかです。

(定義)　任意の実数 x に対して，整式 $P(x)$ と整式 $Q(x)$ が常に $P(x)=Q(x)$ を満たすとき，
「整式 $P(x)$ と整式 $Q(x)$ は恒等的に等しい」
あるいは「$P(x)=Q(x)$ は x についての恒等式」
といい，$P(x)\equiv Q(x)$ とかく。

当然のことですが，定義には，$Q(x)$ が0の場合も含んでいます。

(定理1)
(Ⅰ)　$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$
　は x についての恒等式である。
　$\iff a_0=a_1=\cdots=a_n=0$
(Ⅱ)　$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$
　$=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$
　は x についての恒等式である。
　$\iff a_n=b_n,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ \cdots,\ a_0=b_0$

(証明)
(Ⅰ)　($\Rightarrow$) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ のうち少なくとも一つが0でないとすると

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

を満たす x の値は n 個以下となり，

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

は x についての恒等式ではない。(仮定に矛盾)
よって，$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$　したがって，$a_0=0$
($\Leftarrow$) 明らか。

(Ⅱ)　題意の関係式は

$$(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)=0$$

と同値な式であるので，(Ⅰ)から証明できる。終

(定理2)　ともに n 次以下の整式 $P(x)$，$Q(x)$ について，等式 $P(x)=Q(x)$ が異なる $(n+1)$ 個の x の値に対して成り立つならば，$P(x)=Q(x)$ は x についての恒等式である。

(証明)
$F(x)=P(x)-Q(x)$ とおくと，これは n 次以下の整式である。
仮定より，$P(x_i)=Q(x_i)$ $(1\leqq i\leqq n+1)$ とする。
ただし，$i\neq j$ のとき $x_i\neq x_j$ とする。
$F(x_1)=0$ より，因数定理から $F(x)$ は $x-x_1$ で割り切れる。
つまり，$F(x)=(x-x_1)A_1(x)$
ただし，$A_1(x)$ は $(n-1)$ 次以下の整式である。
ここで $F(x_2)=0$ より，$(x_2-x_1)A_1(x_2)=0$ となる。
$x_1\neq x_2$ から $A_1(x_2)=0$
先ほどと同様に　$A_1(x)=(x-x_2)A_2(x)$
ただし，$A_2(x)$ は $(n-2)$ 次以下の整式である。
以下同様に繰り返していけば，

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)A_n(x)$$

ただし，$A_n(x)$ は定数である。
ここで，$A_n(x)$ は定数なので，改めて k とおく。
すなわち，

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\cdot k$$

今，$F(x_{n+1})=0$ より，

$$(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n)\cdot k=0$$

ここで，$x_{n+1}\neq x_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ より，$k=0$
したがって，$F(x)\equiv 0$ となり，$P(x)\equiv Q(x)$　終

定理2の証明方法を参考にすれば，次の 系 が直ちに得られる。

（系） n 次以下の整式 $P(x)$ に対して，$P(x)=0$ が $(n+1)$ 個の異なる x の値に対して成り立つならば，$P(x)=0$ は x についての恒等式である。すなわち，$P(x)\equiv 0$ である。

§2 考察

幾つかの命題を前述の定理および系を考慮しながら考えます。

（命題1） 任意の x に対して
$a\cos x+b\sin x=0 \Longleftrightarrow a=b=0$

（証明）

$(\Rightarrow)$ $x=0$ のとき $a\cdot 1+b\cdot 0=0$ したがって $a=0$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $a\cdot 0+b\cdot 1=0$ したがって $b=0$

$(\Leftarrow)$ 明らか。終

次に，命題1における定数 a，b をそれぞれ整式 $P(x)$，$Q(x)$ に拡張します。これを命題2とします。

（命題2） x についての整式 $P(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$，$Q(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ が任意の実数 x に対して，
$P(x)\cos x+Q(x)\sin x=0$ を満たすとする。
このとき，$P(x)\equiv 0$ かつ $Q(x)\equiv 0$ となる。

（証明）

一般性を失うことなく，$m\geqq n$ としてよい。
$P(x)\cos x+Q(x)\sin x=0$ が，x についての恒等式であるから，x に $x_k=2k\pi$ $(k=1,\ \cdots,\ m+1)$ を代入する。もちろん，$i\neq j$ のとき $x_i\neq x_j$ である。
このとき，$\sin x_k=0$，$\cos x_k=1$ であるから

$P(x_k)=0$ $(k=1,\ \cdots,\ m+1)$

これは，m 次の整式 $P(x)$ に対して，等式 $P(x)=0$（m 次方程式）が，異なる $m+1$ 個の x の値に対して成り立つことを意味している。

したがって，系より $P(x)=0$ は x についての恒等式である。よって，$P(x)\equiv 0$

同様に，$x_l=\dfrac{\pi}{2}+2l\pi$ $(l=1,\ \cdots,\ m+1)$ を題意の式に代入する。このときも当然 $i\neq j$ のとき $x_i\neq x_j$ である。このとき，

$\sin x_l=1$，$\cos x_l=0$ であるから

$Q(x_l)=0$ $(l=1,\ \cdots,\ n,\ \cdots,\ m+1)$

これは，n 次の整式 $Q(x)$ に対して，等式 $Q(x)=0$（n 次方程式）が，異なる $m+1\ (>n)$ 個の x の値に対して成り立つことを意味している。

したがって，系より $Q(x)=0$ は x についての恒等式である。よって，$Q(x)\equiv 0$ 終

以上のことから，命題2の特別な場合が命題1であることがわかりました。

更に，命題3および命題4を考えます。

（命題3） 任意の x に対して
$a\sin^2 x+b\cos 2x=0 \Longleftrightarrow a=b=0$

（証明）

$(\Rightarrow)$ $x=0$ のとき $a\cdot 0+b\cdot 1=0$ から $b=0$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $a\cdot 1+b(-1)=0$ から $a-b=0$

ゆえに，$a=b=0$

$(\Leftarrow)$ 明らか。終

ここで，命題3における定数 a，b をそれぞれ整式 $P(x)$，$Q(x)$ に拡張してもやはり成立します。

（命題4） 任意の x に対して
$a\sin^2 x+b\cos 2x+c=0 \Longleftrightarrow a=b=c=0$

この命題において $(\Leftarrow)$ は真であるが，$(\Rightarrow)$ は偽（反例 $a=2$，$b=1$，$c=-1$）である。

§3 おわりに

恒等式の扱い方について触れてみたわけですが，自身の授業を振り返ってみて，主に取り上げる整式の場合の「数値代入法」における十分性の確認は強く指導しますが，「係数比較法」は比較的軽く扱うことがしばしばです。

特に，今回の三角関数の恒等式については取り扱うことが殆どありません。そのため，生徒が恒等式の扱い方を安易に考えると，命題3および命題4をともに「明らかに同値」と捉える間違いを犯しかねません。三角関数の恒等式については，前述の命題以外にも様々な場合が考えられます。入試においての三角関数の恒等式の解き方は，やはり，「係数比較法」を使わず，「数値代入法」を使うことが良いのではないでしょうか。

どの領域についても言えることですが，生徒の理解の度合いをきちんと把握する必要があると痛感しました。ご意見いただければ幸いです。

（鳥取県立境高等学校）