数学的な見方・考え方の統合

―道順モデルによる組合せ問題の統合的な扱い方―

横澤（よこさわ） 克彦（かつひこ）

§1 はじめに

一見バラバラに見える問題でも，別の方向から眺めてみると実は同じ問題だったりする。

そうした見方・考え方を指導することで，生徒たちの苦手意識が解消できる事例を紹介していく。

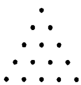
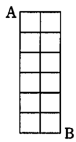
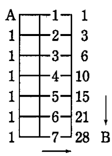
今回の組合せ問題で多くの生徒が混乱するのは，問題場面の多様さと様々な解法の暗記である。

そこで，道順モデルを利用した解法を紹介したい。これにより多様な問題を統合的に扱うことが可能になり，さらに多くの暗記も必要なくなるのである。

下の表をご覧ください。左右でそれぞれの解法を比較してみると，同じ指導事項であっても教科書では問題ごとに別々の解法を示しているのに対して，道順モデルでは一貫してこの解法だけで指導していけることがわかる。

１つの解法をいろいろな問題場面に当てはめることで，生徒の知識はより整理され易くなり，定着もよくなる。ただし，道順モデルでしか指導しないのではなく，まずは道順モデルで知識を整理したあとに，教科書の解法や別解を紹介していくのがよいのだろうと考えている。やはり生徒の理解度や様子を見ながら提示していくことを心掛けたい。

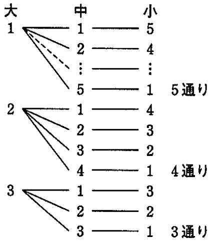
§2 教科書や道順モデルで扱う例題と解法の比較

指導事項	教科書などにある例題と解法	道順モデルを利用した例題と解法
様々な場面で数え上げの工夫を理解させたい。ここで，教科書の例題以外にも道順を数え上げる問題を扱っておく。このとき問題１，２が似た構造になっている不思議さにも触れたい。		
A. 数え上げの工夫	**問題１**　(ガウス少年の逸話)  (1)　左図の点の総数を調べよ。 (2)　7段目までの点の総数を調べよ。 **解答１**　(1)　$1+2+3+4+5=15$ 個 (2)　$1+2+3+4+5+6+7=28$ 個 **別解１**　(2)　$S=1+2+3+4+5+6+7$ とする。 $\begin{array}{r} S=1+2+3+4+5+6+7 \\ +)\ S=7+6+5+4+3+2+1 \\ \hline 2S=8+8+8+8+8+8+8 \end{array}$ $S=\dfrac{8\times 7}{2}$ $=28$ 個	**問題２**　右図のように横の線が７本ある道をＡからＢまで行くとき，最短の道順は何通りあるか？  **解答２**　それぞれの格子点で上と左にあるＡからの道順の数を足していく。  $1+2=3$ $3+3=6$ $6+4=10$ $10+5=15$ $15+6=21$ $21+7=28$ 28 通り

問題 3　（樹形図）

大小中 3 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 7 になる場合の数を求めよ。

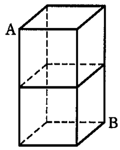
解答 3



5+4+3=12 通り

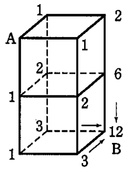
問題 4

右図のような立体においてAからBまで行くとき，最短の道順は何通りあるか？



解答 4

それぞれの格子点で上と左と前面から奥にあるAからの道順の数を足していく。



6+3+3=12 通り

以下の「B．和の法則」や「C．積の法則」では，道順モデルによって視覚的に指導することが有効であると考えている。

教科書では和の法則を問題 5 の例題で解説しているが「和」の意味が「目の和」なのか「または」なのかが捉えにくくなっている。しかし道順モデルでは，和と積のちがいを視覚的に区別して指導することができる。

B. 和の法則

問題 5　大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 4 または 7 になる場合は何通りあるか。

解答 5

和が 4

大	1	2	3
小	3	2	1

（3 通り）

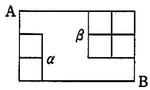
和が 7

大	1	2	3	4	5	6
小	6	5	4	3	2	1

（6 通り）

以上から，和：3+6=9 通り

問題 6　AからBまで行く最短の道順は何通りあるか。



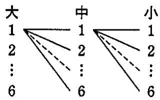
解答 6　2 つの経路 α と経路 β は，どちらか片方だけ通っても，AからBにたどり着ける。したがって足し算。

以上から，和：$\alpha+\beta=3+6=9$ 通り。

C. 積の法則

問題 7　大中小 3 個のさいころを同時に投げるとき，その目の出方は何通りあるか。

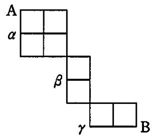
解答 7



以上から，

積：6×6×6=216 通り

問題 8　AからBまで行く最短の道順は何通りあるか。



解答 8　2 つの経路 α, β, γ を同時に通らなければ，AからBにたどり着けない。したがって掛け算。

以上から，積：$\alpha\times\beta\times\gamma=6\times3\times3=54$ 通り

D. 和・積の法則(混合応用)

問題9　整数 12 の正の約数の総和を求めよ。

解答9　$12=2^2\times3$

よって，12 の正の約数は，すべて

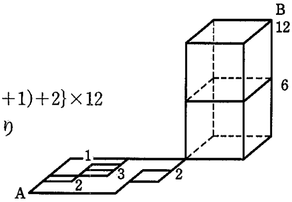
$(1+2+2^2)\times(1+3)$

を展開したときの項として 1 つずつ出てくる。

したがって，総和は

$7\times4=28$ (通り)

問題10　AからBまで行く最短の道順は何通りあるか？



解答10

$\{(2\times3+1)+2\}\times12$

$=108$ 通り

教科書に出てくる以下のような問題 11〜15 は，道順モデルをあてはめるとより分かりやすくなる。これによって様々な解法を覚える必要がなくなり，また視覚的な印象が強いので忘れにくくなる。このとき一見バラバラに見える問題でも，道順モデルという見方・考え方に変えることで，同じ解法に統合していけるよさを実感させたい。

E. 同じものを含む場合の順列

問題11　a，a，a，a，a，a，b，b (a 6 個，b 2 個) の文字全部を使って作られる順列の総数を求めよ。

解答11-1　${}_8C_2\times{}_6C_6$

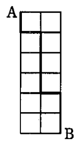
$=\dfrac{8!}{6!2!}$

$=28$ 通り

解答11-2　(解答 2 と同じモデル)

縦↓ 6 個，横→ 2 個の記号全部を使って作られる順列の総数を求めるとすれば，問題 2 での道順モデルと同じ問題になり，AからBまで行く最短の道順が何通りかを考えることになる。

つまり，AからBまでは，縦↓ 6 回と横→ 2 回の合計 8 回の動きがある。



8 回のうち縦↓ 6 回をどこに配置するかを考える。

例えば，上図の経路は，↓→↓↓↓→↓↓という矢印の配置を示す。

${}_8C_6\times{}_2C_2=28$ 通り

問題12　a，b，c の 3 種類の果物から重複を許し，6 個の箱詰めを作る組合せは何通りあるか。ただし 1 個も取らない種類があってもよいものとする。

問題13　$a+b+c=6$ を満たす，0 を含む正の整数の組 (a，b，c) は何組あるか。

解答12-1，13-1

例えば，a 1 個，b 3 個，c 2 個 取ることを $a|bbb|cc$ のように仕切ると考えると，6 個と

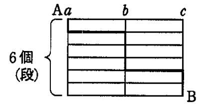
解答12-2，13-2　(解答 2 と同じモデル)

左の例は，前問解答11-2の図解と同じ道順になる。

F. 重複組合せ(基礎・応用)

(3−1) 個の同じものを並べる順列になる。

$_3H_6={}_{6+3-1}C_6=28$ 通り



$_{6+(3-1)}C_2={}_3H_6=28$ 通り

問題14　a, b, c の3種類の果物から重複を許し，9個の箱詰めを作る組合せは何通りあるか。ただし，すべての種類を1個ずつは取るものとする。

問題15　$a+b+c=9$ を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何組あるか。

解答14-1，15-1

$a-1=X$, $b-1=Y$, $c-1=Z$ とおくと，

$$a+b+c=9$$
$$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=9$$
$$X+Y+Z=6$$
$$(X\geqq0,\ Y\geqq0,\ Z\geqq0)$$

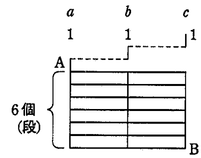
よって，3種類の文字 a, b, c から6個取る重複組合せの総数になる。

$_3H_6={}_{6+3-1}C_6=28$ 通り

解答14-2，15-2

(下6段は前問と同じモデル)

a, b, c に1ずつ分けたあと，残り6は重複組合せで考えていけるから，



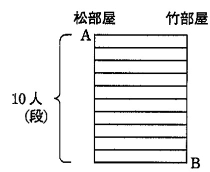
$_{6+(3-1)}C_2={}_3H_6=28$ 通り

§3　おわりに

視覚的な印象もあってか，こうした指導は生徒たちにとても評判がよい。また，授業者としても特別な時間配分や授業を組む必要がなく，通常の授業時間内で指導できる点も強調しておきたい。

しかし次のような問題では，道順モデルが使えないにも関わらず多くの生徒の誤答を増やしてしまった。

次回では，こうした誤答をきっかけに，組み分け問題全体を統合していく指導を紹介します。

<table>
<tr><td>間違えやすい問題</td><td>松，竹の2部屋に10人を分ける方法は何通りあるか。ただし，空室があってもよい。</td></tr>
<tr><td>正解</td><td>$2^{10}=1024$ (通り)</td></tr>
<tr><td>道順モデルをあてはめた誤答</td><td>道順モデルの置き換え
2部屋を縦の2線，10人を横の10段と表現した道順モデルを作り，AからBまで行くときの最短の道順を数え上げる。


計算
$_{10+(2-1)}C_1={}_{11}C_1=11$ (通り)</td></tr>
</table>

(長野県　上田千曲高等学校)