作図と証明を重視した平面図形の指導方法

―2004年度および2005年度の取り組みから―

岡(おか) 良夫(よしお)

§0 はじめに

数学Aの平面図形についての2004年度の実践と2005年度の予定を以下に報告したい。各教科書も多種だが，各教師の実践はもっと多様にわたるだろう。この分野はややもすると角度や長さを求める(求値)問題，あるいは図形の性質や定理を覚える(知識)問題のほうに(無意識に，あるいは意図的に)教師は重点を移しがちである。

しかし，図形を学ぶ上で重要なのは，やはり作図と証明である。また，内容が羅列的にならないよう，できるだけ系統性をもたせるように心掛けた。

§1 2004年度の実践(円を中心とする指導)

下表は，前任校(滋賀県立湖南農業高等学校)で2004年度に2年生の普通科目選択者(少人数)を対象として実践したもので，詳細は次のURLを参照されたい。

http://www.dd.iij4u.or.jp/~yoshio-o/toppage.htm

No.1	円に内接する三角形
No.2	垂直二等分線と二等辺三角形
No.3	外心と重心
No.4	三平方の定理と中線定理
No.5	円周角の定理と正弦定理
No.6	円に内接する四角形
No.7	円周角の定理の逆(転換法)
No.8	シムソン線と垂心
No.9	オイラー線とトレミーの定理
No.10	接弦定理と方べきの定理
No.11	円に外接する三角形
No.12	角の二等分線と点と辺の距離
No.13	内心と辺の比に内分する点
No.14	円に外接する四角形
No.15	2つの円と共通接線

「三角形の外接円」という言い方はあっても，「円に内接する三角形」とはふつう言わない。もちろん，最初に三角形を与えて，後から外接円をかくからなのだが，あえてその順序を逆にしてみたのが，No.1のプリントである。すなわち，円を先にかき，その円周上の3点を結んで三角形をかかせることからこの実践は始まった。そういう三角形は多数かけるが，「すべての三角形を尽くしているか？」という問題提起をし，それに答えるのが，三角形が先，円は後，という従来の順序というわけである。

外心のことを言う前に必要な準備としてNo.2を用意した。ユークリッド幾何が典型であるように，ある定理を証明するために何を使ったかがここでは重要である。それを既習事項として簡単に済ますのも可能だが，この実践では冗長になるのを覚悟の上でできるだけ詳しく紹介し，必要に応じて再度証明した。

また，学習指導要領には明記されていない内容も積極的にとりあげる方針で学習プリントを作成した。例えば，三角形の5心のうち，外心・重心・内心は絶対教えねばならないのに対して，垂心は割愛してもよいのだが，数学IIの「図形と方程式」でよく登場することもあって，触れることとした。また，その証明にもこだわった。ある教科書では，与えられた三角形を2倍に拡大した形を外側にかき，もとの三角形における頂点から対辺への垂線は，外側の三角形の垂直二等分線と一致することを利用しての証

明をしていたが，せっかく円に内接する四角形や円周角の定理（の逆）を習っているのだから，それらを使うような証明に挑戦させた（プリント No.8）。

オイラー線（外心・重心・垂心は一直線上にある）はかなり難しく誘導的になりすぎた感もあるが，これくらいの内容のものでないと定理の不思議さが伝わらないので，証明の動機付けのためにとりあげた次第である。もちろん直感的に自明な定理を証明することも大切だが，そればかりではいけないと思う。

§2　2005年度の予定（証明の段階的指導）

下表は，本校（滋賀県立栗東高等学校）において，2005年度（のたぶん2学期中頃から）数学A履修の1年生全員を対象に実施予定の学習プリントで，まだ作成途上である。詳細は次のURLを参照されたい。

http://www.okan.zaq.jp/english_and_math/write01.htm

No.24	垂直二等分線
No.25	垂線と二等辺三角形
No.26	垂直二等分線と外心
No.27	三角形の種類と外心の位置
No.28	中点連結定理とその逆の証明
No.29	三角形の中線と重心
No.30	複二等辺三角形と円周角の定理
…	…以下順次作成中…

昨年度の平面図形の指導は前述したとおりだが，勤務校も変わり，対象学年や人数も異なることから，指導方針や学習プリントを大幅に改めることとした。

まず，着目したのは「作図」である。コンパスと定規で単に図をかかせるだけでなく，どうしてそれで作図できるのかについて考えさせ，そこに隠れている論理性に注目させることによって，証明の動機付けとしたのである。

例えば，No.24の垂直二等分線（*p*.4，5参照）について言えば，中学校でこの作図については学習しているが，通常の作図では「ひし形」をかいているという点に言及しているのは極めて少ない。もちろん，隣り合う2組の辺の長さが等しい四角形（凧形）でも垂直二等分線が引けるが，わざわざ上下で半径を変えるのは，かえって手間であるから，やはりひし形なのである。

次にいよいよ「証明」である。上記のように垂直二等分線の作図においては，「ひし形の対角線は他を垂直に二等分する」という性質を使っているわけで，それをぜひ証明させてみたいと考えた。もちろん，それを既習事項として証明を省略するのは許される。しかし，そういうふうに証明の機会を生徒から奪うことでますます証明ができなくなると考え，あえて基本的な事項でも証明させることとした。

ただし，最初から「完璧な」証明を要求することは避けた。そうでなくても証明を難しく思っているわけであるから，あくまで「段階的に」証明に慣れさせることに主眼をおくことにした。具体的には，①仮定の確認，②結論の確認，③証明のための図，④合同になりそうな三角形の列挙，⑤補題としての二等辺三角形の性質の確認，⑥証明のための「シナリオ」の穴埋め

という（この場合は6つの）段階をふますのである。

このうち，①～③の段階は昨年度も実践したが，今回は，できるだけきめ細かく指導するのが大切と考え，新たに，④～⑥を追加した。

④「合同になりそうな三角形の列挙」というのは，証明の基本は三角形の合同であるから，それを実際に使うかどうかはさておき，とりあえず証明のための材料集めという意味で確認させるのである。

⑤「補題としての二等辺三角形の性質の確認」は証明のために必要ということで，本来自分で見つけてくるべきものであるが，ある程度証明に慣れるまでは，誘導する意味でこちらから生徒に示すわけである。

⑥「証明のための『シナリオ』の穴埋め」というのは，証明そのものの穴埋めではなくて，あくまで証明のアウトラインを考えさせるのが目的である。証明は本来どうしても形式的にならざるをえないが，最初から完璧に記述できるわけではないから，こういう段階も必要かと考えたのである。

§3　おわりに

以上，2004年度および2005年度の数学Aの取り組みについて述べてきた。新課程の完成年度であるから，図形についても指導法を確固たるものにぜひしていきたいと考えている。

（滋賀県立栗東高等学校）

_月_日：数学A 学習プリント No.24

1年_組___番____________

今回のテーマ

垂直二等分線

（Ⅰ） まず，下に線分 AB をかき，それの垂直二等分線を作図しなさい。ただし，コンパスと定規（三角定規ではなく，目盛りがあっても利用しない）を必ず使い，途中の線は残すこと。

（Ⅱ）（Ⅰ）の作図で，どうして垂直二等分線が引けるのかを説明しなさい。
ヒント：作図の交点を定規で結んでできる垂直二等分線以外の図形に注目すればよい。

(1) ひし形の定義をかきなさい。
【これが「仮定」となる】

(2) ひし形の性質のうち，対角線についてのものをかきなさい。
【これが「結論」となる】

(3) ひし形の図をかいて，対角線を引き，頂点や交点に A，B などの文字をつけなさい。
【これが「証明のための図」となる】

(4) (3)の図の中にある三角形のうち，合同になりそうな三角形の組をすべてかきあげなさい。
【証明の基本は，三角形の合同】

(5) (4)でかきあげた三角形の中には，二等辺三角形が含まれているので，二等辺三角形の性質をかきなさい。
【このように，ある命題の証明のために必要な別の命題のことを「補題」という】

(6) 次のアンダーライン上をうめなさい。
【証明のためのシナリオ】
① 隣り合う 2 つの＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿が合同となる。

その合同条件は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

② その＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿の底角が等しいので，結局 4 つの角が等しくなる。

③ 同様のことを別の＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿でいう。

④ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿で分けられた隣り合う三角形どうしが合同となる。

その合同条件は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

⑤ 以上のことから，＿＿＿＿＿＿＿＿の対角線に関する命題【定理】が成り立つ。

⑥ これにより，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿の作図が前述の方法でできることがわかった。