割り算で求める接線

ー連立方程式を解きたくない Part 2ー

楠田(くすだ)　貴至(たかし)

§0．はじめに

先般「連立方程式を解きたくない」と題して，2点を通る放物線を【定式】としてまとめた。そしてそれが，放物線と直線のグラフを足したものであるという見方をすると，「剰余の定理」が別の面から解釈できることを示したが，今回はその【定式】を拡張して，さらに考察を深めたいと思う。

> **【定式】**
> 2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る放物線の式は
> $y=a(x-x_1)(x-x_2)+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$
> である。(ただし，$a\neq 0$)

§1．放物線の接線

上の【定式】で x_2 を x_1 に限りなく近づけたときを考える。

放物線 $y=ax^2+bx+c$ …① と直線 $y=mx+k$ …② が1点で接するとき，すなわち②が①の接線であるとき，その接点の x 座標を α とすると，①，②から y を消去した2次方程式

$$ax^2+bx+c=mx+k$$

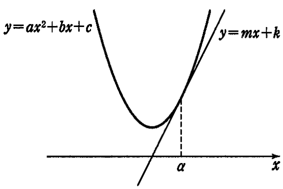
すなわち $ax^2+bx+c-(mx+k)=0$ が重解として α をもつということであるから

$ax^2+bx+c-(mx+k)=a(x-\alpha)^2$ が成り立つ。

すなわち $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+(mx+k)$

である。したがって，

$y=ax^2+bx+c$ は，$y=a(x-\alpha)^2+(mx+k)$ となる。



このことから，【定式】の系として

> **【系1】**
> 放物線上の1点 $x=\alpha$ で，直線 $y=mx+k$ が接しているとき，その放物線の式は
> $y=a(x-\alpha)^2+mx+k$
> である。(ただし，$a\neq 0$)

が出てくる。

すなわち，2点を通る放物線の方程式を表す【定式】に対して，1点で接する放物線の方程式を表す【系1】が出来上がるのである。

これを用いると，次のような問題を「連立方程式を解かずに」解くことができる。

> **問題1**
> 点 $(2,\ 3)$ における接線の傾きが4で，点 $(1,\ 1)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

求める放物線は，$y=a(x-2)^2+4(x-2)+3$ とおける。

これが，点 $(1,\ 1)$ を通ることから

$1=a(1-2)^2+4(1-2)+3$

$\therefore\ \ a=2$

したがって，求める放物線の方程式は

$y=2(x-2)^2+4(x-2)+3$ より

$y=2x^2-4x+3$

普通にやるなら

求める放物線を，$y=ax^2+bx+c$ とおく。

これが，点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を通ることから

$$a+b+c=1\ \cdots\ ①$$
$$4a+2b+c=3\ \cdots\ ②$$

また，$y'=2ax+b$ で，$(2,\ 3)$ での傾きが4なので

$$4a+b=4\ \cdots\ ③$$

①〜③を解いて

$a=2,\ b=-4,\ c=3$

したがって，求める放物線の方程式は

$y=2x^2-4x+3$ である。

とするでしょう。

ところで，このような問題を「連立方程式を解かずに」やるといろいろと面白いことがわかる。実は，この【系１】は見方をかえると『微分しなくても接線が求められる』ということを示しているのである。

> **問題２**
> 関数 $y=-2x^2+4x+1$ のグラフ上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

普通には

$y'=-4x+4$ で，$y'_{x=2}=-4\cdot 2+4=-4$ より

$y=-4(x-2)+1$ すなわち $y=-4x+9$

とするか，

接線の方程式を，$y=m(x-2)+1$ とおいて

$y=-2x^2+4x+1$ に代入した２次方程式

$2x^2+(m-4)x-2m=0$ の判別式 $D=0$ から

$m=-4 \quad \therefore \quad y=-4x+9$

とするところですが，下のように組み立て除法を２段重ねするだけで，

$$\begin{aligned} y&=-2(x-2)^2-4(x-2)+1 \\ &=-2(x-2)^2-4x+9 \end{aligned}$$

となるので，接線の方程式は

$y=-4x+9$

というように，微分も判別式も使わずに接線の方程式が求められてしまう。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & -2 & 4 & 1 \\ & & -4 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 0 & \boxed{1} \\ & & -4 & \\ \hline & -2 & \boxed{-4} & \end{array}$$

もちろん，$-2x^2+4x+1$ をそのまま

$(x-2)^2=x^2-4x+4$ で割り算してもよい。

これは剰余の定理で見ると，$-2x^2+4x+1$ を

$(x-2)^2$ で割ったときの余りが $-4x+9$ であるということである。

同じような接線の基本問題もこの方法でやってみる。

> **問題３**
> 関数 $y=x^2+3$ のグラフに点 $(1,\ 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

接点の x 座標を α とすると，

$$y=(x-\alpha)^2+2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2+3$$

だから，接線の方程式は

$$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2+3$$

である。

これが点 $(1,\ 0)$ を通ることから，代入して

$$0=2\alpha(1-\alpha)+\alpha^2+3$$

すなわち

$$\alpha^2-2\alpha-3=0$$

これを解いて，$\alpha=-1,\ 3$

したがって，接線の方程式は

$\alpha=-1$ のとき，$y=-2(x+1)+1+3$ より

$$y=-2x+2$$

$\alpha=3$ のとき，$y=6(x-3)+9+3$ より

$$y=6x-6$$

もちろん，下のように $x-\alpha$ で割り算している。

$$\begin{array}{r|rrr} \alpha & 1 & 0 & 3 \\ & & \alpha & \alpha^2 \\ \hline \alpha & 1 & \alpha & \boxed{\alpha^2+3} \\ & & \alpha & \\ \hline & 1 & \boxed{2\alpha} & \end{array}$$

普通にやって，接点の x 座標を α とすると，

$y'=2x$ で $y'_{x=\alpha}=2\alpha$ なので，接線の方程式は

$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2+3$ とするところが，【系１】の割り算に置き換わっているだけである。

なお【系１】で，$m=0$ のときは，放物線上の１点 $x=\alpha$ で，直線 $y=k$ が接していることになるが，その放物線の式は $y=a(x-\alpha)^2+k$ である。これは普通に平方完成した２次関数であり，頂点での接線は傾き０の直線であるというあたりまえのことを示しているだけである。

§２．３次以上の曲線の接線

そしてさらに，この【系１】で，$a=Q(x)$ とすると

> **【系２】**
> 曲線上の１点 $x=\alpha$ で，直線 $y=mx+k$ が接しているとき，その曲線の式は
> $y=Q(x)(x-\alpha)^2+mx+k$
> である。(ただし，$Q(x)$ は，１次以上の整式)

というのが出てくる。これは先の論文で，剰余の定理再考として述べたものと本質的に同じである。

もちろん，【系１】は【系２】の特別な場合になっていて含まれる。つまり，３次以上の曲線であっても，

$(x-\alpha)^2$ で割った余り（高々１次）が接線になるのである。

問題４
関数 $y=x^3+4x^2$ のグラフ上の点 $(-1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

今度は，下のように２段重ねの組み立て除法を使って，

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\
 & & -1 & -3 & 3 \\ \hline
-1 & 1 & 3 & -3 & \boxed{3} \\
 & & -1 & -2 & \\ \hline
 & 1 & 2 & \boxed{-5} &
\end{array}$$

$y=(x+2)(x+1)^2-5(x+1)+3$ であるから，接線の方程式は，$y=-5(x+1)+3$ より $y=-5x-2$ である（因みに $x=-2$ が交点の x 座標)。

また【系２】でも，$m=0$ のときは，曲線上の１点 $x=\alpha$ で，直線 $y=k$ が接していることになるが，これは，その点が極値になっている可能性があることを表している。

例１　$y=x^3-3x$ のグラフ上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式は，

$$y=(x+2)(x-1)^2+0(x-1)-2$$

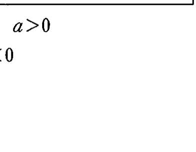
より，$y=-2$ である。これは極値である。

例２　$y=x^3-3x^2+3x$ のグラフ上の点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式は，$y=(x-1)(x-1)^2+1$ より，$y=1$ である。これは極値ではない。

§３．放物線の接線再考

【系１】で $\alpha=0$ のときには，もちろん割り算する意味はない。そのとき，【系１】は $y=ax^2+mx+k$ となるが，これは $x=0$ における接線の方程式が，$y=mx+k$ であることを示している。この見方をすると次のような基本問題の見通しがよくなる。

問題５
放物線 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになっているとき，a，b，c の符号を答えよ。



グラフが下に凸であるから，$a>0$
y 切片が負であるから，$c<0$
軸：$x=-\dfrac{b}{2a}>0$ で，$a>0$ であるから，$b<0$
というように，普通はやるでしょう。
もっとも最近は，$x=0$ における接線の傾きに注目して $y'=2ax+b$ で，$y'_{x=0}=b$ であるから，$b<0$ とやることも広まっている。しかし，【系１】の内容から，$x=0$ における接線の方程式そのものが，$y=bx+c$ なので，$b<0$，$c<0$ が見ただけでわかるのである。

§４．おわりに

最後にもうひとつ問題を見てみる。

問題６
$x^3+x^2+x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ が x の恒等式であるとき，a，b，c，d の値を求めよ。

何の変哲もない恒等式の基本問題であるが，係数比較，数値代入の解法以外に，組み立て除法の３段重ねで求める方法があることは周知のことであろう。
しかし，ここまでしてきた話の後では，
曲線 $y=x^3+x^2+x+1$ 上の $x=1$ における接線の方程式が $y=c(x-1)+d$ であるというように見えないであろうか。
組み立て除法で a，b，c，d を求めたとしても，c は $x=1$ における接線の傾きで，d は接点の y 座標であるというように，解法の中に目的意識や，自分のやっていることが見えていてやれるのではないか。
そういったことがわかりながらやるのと，わからないままやるのとでは，おのずと違いが出てくると思うのである。
ただ漫然と割り算したらできるというだけのものではないと思う。そしてこういったことが数学の面白さなんだろうなと思ったりもする。

《参考文献》

「2000 ニュースタンダード数学演習Ｉ・Ａ＋II・Ｂ」
数研出版編集部　編　数研出版
「新編　数学II」数研出版
「3 TRIAL 数学II」数研出版編集部　編
数研出版

（兵庫県立武庫荘総合高等学校）