三角比の表を超える
～近似値ではなく真の値の表を目指して～

にしもと　のりよし
西元　教善

§0．はじめに

教科書の巻末に掲載されている0°から90°までの1°きざみの「三角比の表」は，真の値に一致しているものもあるが，そのほとんどは小数表示したときの小数第4位までの近似値である。教科書の例題にあるような誤差を伴うような測量の問題であればこれで十分であろうが，厳密性を重んじる数学としてはいささか物足らなさを感じる生徒もいるだろう。確かに，数学Ⅰでは30°，45°，60°の角についての三角比はそれらを内角とする直角三角形の辺の比から真の値を扱うし，15°，75°の角についても図を工夫することで真の値が求められる。数学Ⅱになれば加法定理を学習し，そこから派生する2倍角の公式，半角の公式，3倍角の公式から真の三角比の値をたくさん求められるようになる。すると三角比の表は真の値で書き改められるのではなかろうかと考える生徒が出てくるはずである。このような生徒のための参考になればと思い，その一考察を行った。

ここで真の値とは，累乗根をとることや四則計算の結果として表現されるものとする。

§1．3°の倍角の三角比

「§0．はじめに」でも触れたように，数学Ⅰの段階でも15°，30°，45°，60°，75°という3°の倍角のいくつかについては，三角比の真の値を図形的に求められる。さらに，以下に示すように加法定理を使えば18°の三角比を求められるから，18°−15°=3°の三角比も求められる。結局，0°から90°までの3°の倍角の三角比は加法定理からその真の値が求められる。

(1)　sin18°，cos18°，tan18°の真の値

三角比の表によれば，それぞれ0.3090，0.9511，0.3249であるが，これらの真の値を求めてみることにする。$\sin 18°$の真の値がわかれば，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\cos 18°$ の真の値がわかり，さらには $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\tan 18°$ の真の値がわかるので $\sin 18°$ の真の値から求める。

$\alpha=18°$ とおくと $5\alpha=90°$ であるが，

正弦の $90°-\theta$ についての三角比の性質

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ …①，

2倍角の公式 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ …②，

3倍角の公式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ …③

を使うことを念頭に置き，$3\alpha=90°-2\alpha$ と変形すると①から $\sin 3\alpha=\sin(90°-2\alpha)=\cos 2\alpha$，さらに，②，③から $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=1-2\sin^2\alpha$

であるから，$4\sin^3\alpha-2\sin^2\alpha-3\sin\alpha+1=0$

ここで，$x=\sin\alpha$ とおけば，$\sin 18°$ は3次方程式 $4x^3-2x^2-3x+1=0$ の実数解の一つとなる。左辺を因数分解して，$(x-1)(4x^2+2x-1)=0$ これを解くと $0<x(=\sin 18°)<1$ から

$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ となり，$\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\cos 18°>0$ から

$\cos 18°=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ となり，

$\tan 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ であることもわかる。

(2)　sin3°，cos3°，tan3°の真の値

三角比の表によれば，それぞれ0.0523，0.9986，0.0524である。

さて，15°の正弦，余弦の真の値を求めることは，加法定理の代表的かつ基本的な応用であり，

$\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である。

ここで，$\sin 3°=\sin(18°-15°)$ に加法定理を使えば，

$\sin 3°=\sin(18°-15°)$

$=\sin 18^\circ\cos 15^\circ-\cos 18^\circ\sin 15^\circ$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{60+12\sqrt{5}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}}{16}$$

また，$\cos 3^\circ$ も同様にして，

$$\frac{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{60+12\sqrt{5}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}}{16}$$

が得られる。したがって $\tan 3^\circ$ は，

$$\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{60+12\sqrt{5}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}}{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{60+12\sqrt{5}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}}$$

であることがわかる。

§2．sin 1° の真の値へのアプローチ

三角比の表によれば 0.0175 である。

さて，§1の(1)，(2)でもわかるように，$\sin 1^\circ$ の真の値が求められれば $\cos 1^\circ$，$\tan 1^\circ$ の真の値も求められる。すると，加法定理を使えば 1° きざみでの三角比の真の値がすべて求められる。

$\sin 3^\circ$ の真の値が求められていること，$3^\circ=1^\circ\times 3$ であることから，3倍角の公式を用いて $\sin 3^\circ=\sin(1^\circ\times 3)=3\sin 1^\circ-4\sin^3 1^\circ$ と変形し，$\sin 18^\circ$ の真の値を求めたときのように $\sin 1^\circ$ を x とおいて，x の3次方程式を作って解くことでその値を求めようとするのは自然な流れである。しかし，この場合，$\sin 3^\circ$ の値が§1の(2)での値であるから

$$4x^3-3x+\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{60+12\sqrt{5}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}}{16}=0 \quad\cdots\cdots Ⓐ$$

という，定数項の極めて複雑な3次方程式になってしまい，$\sin 18^\circ$ の場合のように簡単には求められそうにない。

そこで，次のように進めてみることにする。何も 1° の正弦を考えるのにこのような方向のみに進む必然性はなく，例えば $1^\circ=10^\circ-9^\circ$ と考えても差し支えはないはずである。この場合，

$\sin 1^\circ=\sin(10^\circ-9^\circ)=\sin 10^\circ\cos 9^\circ-\cos 10^\circ\sin 9^\circ$

となるから 9° と 10° の正弦，余弦の真の値が求められればよい。

(1) sin 9° と cos 9° の真の値

三角比の表によれば，それぞれ 0.1564，0.9877 である。これらの真の値を求めるには，先程求めた $\cos 18^\circ$ の真の値と半角の公式を使えばよく，

$$\sin 9^\circ=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4},$$

$$\cos 9^\circ=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

が即座に求められる。

(2) sin 10° と cos 10° の真の値

三角比の表によれば，それぞれ 0.1736，0.9848 である。

さて，$30^\circ=10^\circ\times 3$ であるから，3倍角の公式を使えば $\sin 30^\circ=3\sin 10^\circ-4\sin^3 10^\circ$ となり，$\sin 10^\circ$ は3次方程式 $3x-4x^3=\frac{1}{2}$，つまり

$$x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0 \quad\cdots\cdots Ⓑ$$

という3次方程式の実数解の一つになる。これが累乗根，四則計算で求められれば，$\cos 10^\circ$ もそうであり，ひいては $\sin 1^\circ$ の真の値も累乗根，四則計算で求められる。

ここで，$1^\circ=10^\circ-9^\circ$ とした理由は，9° の正弦，余弦の真の値が求めやすいこと，3次方程式Ⓑの係数が先程の3次方程式Ⓐに比べてはるかに簡単であることからである。

§3．3次方程式の解の公式（カルダノの公式）

0° から 90° までの三角比の真の値を，累乗根と四則計算で表すには $\sin 1^\circ$ の真の値が求まればよいが，そのためには $\sin 10^\circ$ の真の値が，つまりは3次方程式Ⓑが累乗根と四則計算で解ければよい。そこで，3次方程式の解の公式（カルダノの公式）で求めることにする。

(1) カルダノの公式

3次方程式 $x^3+px+q=0$ の解 x_1，x_2，x_3 は，

$$x_1=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta},\quad x_2=\omega\sqrt[3]{\alpha}+\omega^2\sqrt[3]{\beta},$$
$$x_3=\omega^2\sqrt[3]{\alpha}+\omega\sqrt[3]{\beta}$$

ただし，$\alpha=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}$，

$$\beta=\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2},\quad \omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

というのが，カルダノによる3次方程式の解の公式

である。これを使って3次方程式Ⓑを解いてみることにする。

Ⓑにおいて，$p=-\dfrac{3}{4}$，$q=\dfrac{1}{8}$ であるから，

$\sqrt{\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+\left(\dfrac{q}{2}\right)^2}=\sqrt{-\dfrac{3}{256}}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}i$ であるから，

$$\alpha=-\frac{\frac{1}{8}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{16}i=\frac{-1+\sqrt{3}}{16}=\frac{1}{8}\omega,$$

同様にして，$\beta=\dfrac{1}{8}\omega^2=\dfrac{1}{8}\overline{\omega}$ である。

すると，$\sqrt[3]{\alpha}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\omega}$，$\sqrt[3]{\beta}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\overline{\omega}}$ となるから，

$$x_1=\frac{\sqrt[3]{\omega}+\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2},$$

$$x_2=\frac{\omega\sqrt[3]{\omega}+\omega^2\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2}=\frac{\omega\sqrt[3]{\omega}+\overline{\omega}\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2},$$

$$x_3=\frac{\omega^2\sqrt[3]{\omega}+\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2}=\frac{\overline{\omega}\sqrt[3]{\omega}+\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2}$$

ところで，$f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}$ とおくと，

$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{4}$ であるから $f'(x)=0$ を解くと，

$x=\pm\dfrac{1}{2}$ で，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}<0$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}>0$ であること，さらに $f(0)=\dfrac{1}{8}>0$ であることから，3次方程式Ⓑは異なる3個の実数解（負の解1個，正の解2個）をもつことがわかる。

各 x_i $(i=1, 2, 3)$ には ω の立方根と $\overline{\omega}$ の立方根があるのでそれぞれについて，複数の値をもつことになるが，解として適するのは実数となるものである。

ここで，ω の立方根を
$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0°\leqq\theta<360°)$ とおくと，

$$z^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\omega=\cos 120°+i\sin 120°$$

より $3\theta=120°,\ 480°,\ 840°$ である。

よって，$\theta=40°,\ 160°,\ 280°$ となるから，$\sqrt[3]{\omega}$ は，

$\cos 40°+i\sin 40°$，$\cos 160°+i\sin 160°$，
$\cos 280°+i\sin 280°$ という3つの値をもつ。

同様にして，$\sqrt[3]{\overline{\omega}}$ は $\cos 80°+i\sin 80°$，
$\cos 200°+i\sin 200°$，$\cos 320°+i\sin 320°$
という3つの値をもつ。

ここで，$(\sqrt[3]{\omega},\ \sqrt[3]{\overline{\omega}})=$
$(\cos 40°+i\sin 40°,\ \cos 320°+i\sin 320°)$,
$(\cos 160°+i\sin 160°,\ \cos 200°+i\sin 200°)$,
$(\cos 280°+i\sin 280°,\ \cos 80°+i\sin 80°)$
という組み合わせをすれば x_1 は実数 $\cos 40°$，$\cos 160°$，$\cos 280°=$**$\sin 10°$** という異なる3つの実数解を表す。これが，3次方程式Ⓑの解である。しかし，このままでは $\sin 10°$ を累乗根と四則計算で表したことにはならない。何故なら $\dfrac{\sqrt[3]{\omega}+\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2}$ は一つの確定した値を表すものではなく，その複数ある値の一つが $\sin 10°$ になるというだけのものである。

しかし，あくまでも累乗根と四則計算で表す，たとえ根号の中が虚数であっても，という態度を貫きたい。そのため，次のような苦肉の策を講じることにする。

(2) 偏角における規定

ω の立方根とその共役な複素数である $\overline{\omega}=\omega^2$ の立方根はそれぞれ3つあるが，(1)でみたように適切に組み合わせると，$\sin 10°$ になる。この適切な組合せを偏角に規定を設けることで可能にしたい。そこで，次のような規定をする。

α を複素数とするとき， $\arg\alpha=\theta$ $(-180°<\theta\leqq 180°)$ に対して， $\arg\sqrt[3]{\alpha}=\dfrac{\theta}{3}$，$\arg\sqrt[3]{\overline{\alpha}}=-\dfrac{\theta}{3}$ と定める。

このようにすれば，$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ に対して，
$\sqrt[3]{\omega}=\cos 40°+i\sin 40°$，
$\sqrt[3]{\overline{\omega}}=\cos(-40°)+i\sin(-40°)$ となるから，

$$\begin{aligned}\overline{\omega}\sqrt[3]{\omega}&=\{\cos(-120°)+i\sin(-120°)\}\\&\quad\times(\cos 40°+i\sin 40°)\\&=\cos(-80°)+i\sin(-80°)\end{aligned}$$

また，
$$\begin{aligned}\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}&=(\cos 120°+i\sin 120°)\\&\quad\times\{\cos(-40°)+i\sin(-40°)\}\\&=\cos 80°+i\sin 80°\end{aligned}$$

ここで，$\cos(-80°)=\cos 80°$ であるから，

$\dfrac{\overline{\omega}\sqrt[3]{\omega}+\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2}=\cos 80°=\sin 10°$ となる。

また，$\dfrac{\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}-\overline{\omega}\sqrt[3]{\omega}}{2i}=\sin 80°=\cos 10°$

このように，累乗根の偏角や共役な複素数についての偏角を規定することが許されるならば，$\sin 10°$ や $\cos 10°$ は虚数を用いて表すことができる。

(3) sin 1° の真の値

このような規定のもとでは，sin 1° の真の値は次のように表せることになる。

$$\sin 1^\circ = \frac{\overline{\omega}\sqrt[3]{\omega}+\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}}{2}\,\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4} - \frac{\omega\sqrt[3]{\overline{\omega}}-\overline{\omega}\sqrt[3]{\omega}}{2i}\,\frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

§4．おわりに

タイトルの上では，三角比の表の近似値をすべて真の値で置き換えた表を提示するような印象を与えたかもしれないが，結局のところは偏角においてある規定をすれば複素数の累乗根，四則計算を経由して sin 1° を表せるから，ひいては 1° きざみで 0° から 90° までの三角比が理屈の上で真の値が表せることを示すにとどまった。

本稿を作成するにあたっては，一昨年福岡市で開催された第 31 回全国理数科教育研究大会での土家，柴田先生（岡山県立倉敷天城高校）の発表の中の課題研究「sin 1° への挑戦」を参考にさせて頂いた。そこでは，生徒さんが 3 次方程式Ⓐをマセマティカという数学ソフトで解こうとされ，計算途中という形で終わられていたので，そこをより簡単な 3 次方程式Ⓑで解決できないかと思い，考察した次第である。

ここで扱った内容は，三角比（特に加法定理），3 次方程式，複素数平面（特にド・モアブルの定理）であるが，一つの題材で横断的に考察でき，まさしく課題研究としてはよいテーマであると思う。

《参考文献》

1）土家槙夫，柴田茂徳（2003）「数学の課題研究と本校理数科の取り組み」第31回全国理数科教育研究大会誌　その 1　*pp*.147～180　全国理数科高等学校校長会

2）志賀浩二（1994）「数学が育っていく物語　第 5 週　方程式」岩波書店

（山口県立岩国高等学校）