アポロニウスの円で正五角形を描く

結川（ゆいかわ） 義明（よしあき）

§0．はじめに

『数学II』の図形と方程式の中に，アポロニウスの円が出てくる。

アポロニウスの円とは

> 2定点A，Bからの比が$m:n$である点の軌跡は，$m \neq n$ ならば，線分ABを$m:n$の比に内分する点と外分する点を直径の両端とする円となる。この円をアポロニウスの円という。

以前，生徒にアポロニウスの円を指導しているとき，ふと次のことが頭を過った。

・黄金比をもつアポロニウスの円とはどのようなものか。

・アポロニウスの円を利用して，正五角形が描けないか。

以下，この2点について，考察してみたい。

§1．黄金比をもつアポロニウスの円

2定点A，Bをx軸上にとり，それぞれの座標を$(a,\ 0)$，$(b,\ 0)$とする。また，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1 \quad \cdots①$$

を満たす点Pの座標を$(x,\ y)$とする。

①から　$\mathrm{AP}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{BP}$

これを座標で表すと

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{(x-b)^2+y^2}$$

両辺を平方して，整理すると

$$x^2+\{(\sqrt{5}-1)a-(\sqrt{5}+1)b\}x+y^2-\frac{(\sqrt{5}-1)a^2-(\sqrt{5}+1)b^2}{2}=0$$

すなわち

$$\left\{x+\frac{(\sqrt{5}-1)a-(\sqrt{5}+1)b}{2}\right\}^2+y^2=(b-a)^2$$

したがって，①の条件を満たすアポロニウスの円は

中心が$\left(\dfrac{(\sqrt{5}+1)b-(\sqrt{5}-1)a}{2},\ 0\right)$，

半径が$|b-a|$の円になる。

これは，2点A，Bの距離に他ならない。

このことから，

黄金比をもつアポロニウスの円の半径は2定点の距離に等しい

ことがわかる。

意外にきれいな半径をもっているのである。

§2．アポロニウスの円で正五角形を描く

遠いギリシャ時代から，定規とコンパスだけを用いて，正三角形，正五角形，正十五角形とそれらを2倍ずつしていく正n角形が作図できることが知られていた〔参考文献1）参照〕。ちなみに正五角形は次の手順で作図することができる。

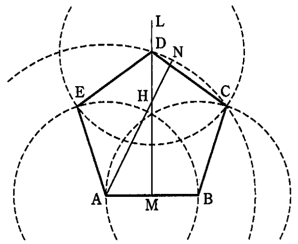
(i) 線分ABの垂直二等分線LMを引く。
(Mは線分ABの中点)

(ii) LM上にHM＝AB となる点Hをとり，直線AHを引く。

(iii) 直線AHの延長上に，HN＝AM となる点Nをとる。

(iv) 点Aを中心として半径ANの円を描き，直線LMとの交点をDとする。

(v) 点Aと点Dをそれぞれ中心とし，ABを半径とする円を描き，交点をEとする。



(vi) 点Bと点Dをそれぞれ中心とし，ABを半径とする円を描き，交点をCとし，点A，B，C，D，Eを結ぶと正五角形ABCDEができる。

正五角形の一辺と対角線の比は，黄金比の関係にあることから，先のアポロニウスの円を利用して，次の手順で正五角形を描くことができる。

ここでは，2定点A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$とする。

手順1　2点A，Bを直径の両端にもつ円をxy平面に描く。ここで，この円とy軸の正の部分との交点をCとする。

手順2　定点Aを中心とし，半径1の円を描く。ここで，この円とx軸との交点(原点以外)をDとすると，線分CDは$\sqrt{5}$となる。(図1)

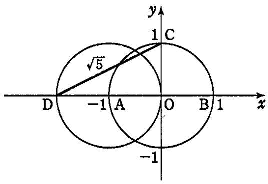


図1

手順3　次に，2定点A，Bからの比が①であるアポロニウスの円を描く。§1の結果から，この円の中心は$(\sqrt{5},\ 0)$，半径は2である。(図2)

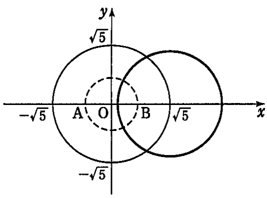


図2

手順4　ここで，このアポロニウスの円上に任意の点Pをとり，2定点A，Bとそれぞれ結び，線分APおよびBPを作る。

手順5　点Aを中心とした半径BPである円と，点Pを中心とした半径BPである円の交点をSとする。点Aを中心とした半径BPである円と，点Pを中心とした半径APである円の交点をRとする。また，点Aを中心とした半径APである円と，点Pを中心とした半径BPである円の交点をQとする。最後に，点A，S，P，Q，Rを結ぶと正五角形ASPQRができる。(図3)

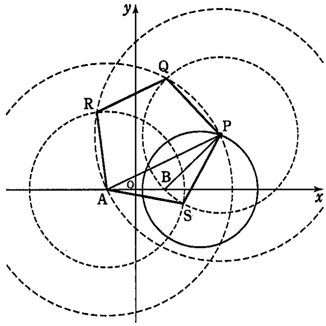


図3

この作図法のメリットは，1つのアポロニウスの円から，様々な大きさの正五角形が容易に描けることにある。

§3．最後に

直径の両端である内分点，外分点を除いて，アポロニウスの円が，「常に2定点からの距離の比を一定(1：1を除く)に保つ」ことを視覚的に実感させるのは意外に難しい。そこで，表計算ソフトEXCELのVBA機能などを使って，黄金比をもつアポロニウスの円上の任意の点を動かしながら，2定点からの距離を一辺と対角線にもつ正五角形が，つねに円上の任意の点と2定点から作図できることを認識させる(図4，図5参照)。

これにより，アポロニウスの円の性質(意味)をより理解させることができるのではないかと考える。

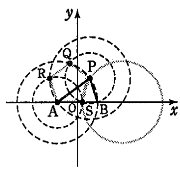


図4

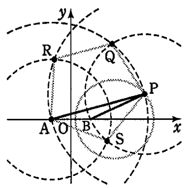


図5

《参考文献》

1)「数学100の発見」数学セミナー編集部

(埼玉県立所沢高等学校)