# $\sum_{k=1}^{n} k^p$ は $\sum_{k=1}^{n} k$ と $\sum_{k=1}^{n} k^2$ からできている

松浦（まつうら）　芳朋（よしとも）

## §1. 導入

自然数 $p$ について,

$$S_p=\sum_{k=1}^{n} k^p$$

とおく。2022 年度の山形大学の入試で, $S_5$ を $S_1$ を用いて表す問題が出題された。教科書では

$$S_0=n,\ S_1=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ S_3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

を, 主に $(k+1)^{p+1}-k^{p+1}$ の計算と二項定理で求めている。例えば, $S_5$ については,

$$(k+1)^6-k^6=6k^5+15k^4+20k^3+15k^2+6k+1$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^6-k^6\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(6k^5+15k^4+20k^3+15k^2+6k+1)$$

$$(n+1)^6-1=6S_5+15S_4+20S_3+15S_2+6S_1+S_0$$

これをまとめていくと,

$$S_5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)=\frac{1}{3}S_1{}^2(4S_1-1)$$

を得られる。しかし, その過程で $S_4$, $S_3$, $S_2$, $S_1$, $S_0$ のすべてが必要で, 計算が複雑である。

本稿では, $S_p$ が $S_1$ と $S_2$ の多項式で表されることを $p$ が奇数と偶数の場合に分けて示していく。扱いやすさから, 先に $p$ が奇数の場合を述べる。

## §2. 奇数の場合

一般的に

$$(k+1)^pk^p-k^p(k-1)^p=k^p\{(k+1)^p-(k-1)^p\}$$

が成り立つので

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^pk^p-k^p(k-1)^p\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^p\{(k+1)^p-(k-1)^p\}$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^pk^p-k^p(k-1)^p\}=\{n(n+1)\}^p-0$$

であるから

$$\{n(n+1)\}^p=\sum_{k=1}^{n}k^p\{(k+1)^p-(k-1)^p\} \quad \cdots\cdots ①$$

特に, $p=1$ のとき

$$n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k\{(k+1)-(k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2=2S_1$$

$$S_1=\frac{1}{2}n(n+1)$$

①より

$$(2S_1)^p=\sum_{k=1}^{n}k^p\{(k+1)^p-(k-1)^p\} \quad \cdots\cdots ②$$

②の $p$ に自然数を順次代入して, 右辺に二項定理を適用していく。

$p=2$ のとき

$$(2S_1)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\{(k+1)^2-(k-1)^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot 4k=4S_3$$

$$S_3=S_1{}^2$$

$p=3$ のとき

$$(2S_1)^3=\sum_{k=1}^{n}k^3\{(k+1)^3-(k-1)^3\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3\cdot 2(3k^2+1)$$

$$=2(3S_5+S_3)$$

$S_3=S_1{}^2$ であるから, まとめると

$$S_5=\frac{1}{3}(4S_1{}^3-S_3)=\frac{1}{3}S_1{}^2(4S_1-1)$$

$p=4$, $5$ のとき, 計算は省略するが

$$S_7=2S_1{}^4-S_5=\frac{1}{3}S_1{}^2(6S_1{}^2-4S_1+1)$$

$$S_9=\frac{1}{5}(16S_1{}^5-10S_7-S_5)$$

$$=\frac{1}{5}S_1{}^2(16S_1{}^3-20S_1{}^2+12S_1-3)$$

を得る。一般的に, ②の右辺を計算すると

$$\sum_{k=1}^{n} k^p\cdot 2({}_pC_1k^{p-1}+{}_pC_3k^{p-3}+{}_pC_5k^{p-5}+\cdots\cdots)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}({}_pC_1k^{2p-1}+{}_pC_3k^{2p-3}+{}_pC_5k^{2p-5}+\cdots\cdots)$$
$$=2(pS_{2p-1}+{}_pC_3S_{2p-3}+{}_pC_5S_{2p-5}+\cdots\cdots)$$

②から

$$S_{2p-1}=\frac{1}{p}(2^{p-1}{S_1}^p-{}_pC_3S_{2p-3}-{}_pC_5S_{2p-5}-\cdots\cdots)$$

よって，$p\geqq 2$ のとき，$S_{2p-1}$ は $S_1$ の $p$ 次式で，${S_1}^p$ の係数は $\dfrac{2^{p-1}}{p}$ である。

更に，数学的帰納法により $S_{2p-1}$ は ${S_1}^2$ を因数にもつ。

ここで，①，②は，$S_{2p}$ のパターンには式の作り方から適応できない。$S_{2p}$ の場合は，別の方針で考えなければならない。

## §3. 偶数の場合

一般的に

$$(2k+1)(k+1)^pk^p-(2k-1)k^p(k-1)^p$$
$$=(2k^{p+1}+k^p)(k+1)^p-(2k^{p+1}-k^p)(k-1)^p$$
$$=2k^{p+1}\{(k+1)^p-(k-1)^p\}+k^p\{(k+1)^p+(k-1)^p\}$$

であるから，①を作るときと同様の議論で

$$(2n+1)\{n(n+1)\}^p$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}\{(k+1)^p-(k-1)^p\}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}k^p\{(k+1)^p+(k-1)^p\} \quad \cdots\cdots ③$$

を得る。特に，$p=1$ のとき

$$(2n+1)n(n+1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2\{(k+1)-(k-1)\}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}k\{(k+1)+(k-1)\}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}2k^2+\sum_{k=1}^{n}2k^2=6S_2$$

よって

$$S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

となる。これと③から

$$6S_2(2S_1)^{p-1}=2\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}\{(k+1)^p-(k-1)^p\}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}k^p\{(k+1)^p+(k-1)^p\} \quad \cdots\cdots ④$$

②のときと同様に，④の $p$ に自然数を順次代入して，右辺に二項定理を適用していく。

$p=2$ のとき

$$6S_2\cdot 2S_1=2\sum_{k=1}^{n}k^3\{(k+1)^2-(k-1)^2\}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}k^2\{(k+1)^2+(k-1)^2\}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}k^3\cdot 4k+\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot 2(k^2+1)$$
$$=10S_4+2S_2$$
$$S_4=\frac{1}{5}S_2(6S_1-1)$$

$p=3$ のとき

$$6S_2(2S_1)^2=2\sum_{k=1}^{n}k^4\{(k+1)^3-(k-1)^3\}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}k^3\{(k+1)^3+(k-1)^3\}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}k^4\cdot 2(3k^2+1)+\sum_{k=1}^{n}k^3\cdot 2(k^3+3k)$$
$$=14S_6+10S_4$$
$$S_6=\frac{1}{7}(12S_2{S_1}^2-5S_4)=\frac{1}{7}S_2(12{S_1}^2-6S_1+1)$$

以下，同様の計算で，$p=4$ のとき

$$24S_2{S_1}^3=9S_8+14S_6+S_4$$
$$S_8=\frac{1}{9}(24S_2{S_1}^3-14S_6-S_4)$$
$$=\frac{8}{3}S_2{S_1}^2(S_1-1)+S_4$$
$$S_8=S_2\left(\frac{8}{3}{S_1}^3-\frac{8}{3}{S_1}^2+\frac{6}{5}S_1-\frac{1}{5}\right)$$

$p=5$ のとき

$$48S_2{S_1}^4=11S_{10}+30S_8+7S_6$$
$$S_{10}=\frac{1}{11}(48S_2{S_1}^4-30S_8-7S_6)$$
$$S_{10}=\frac{1}{11}S_2(48{S_1}^4-80{S_1}^3+68{S_1}^2-30S_1+5)$$

一般的に，④より

$$6S_2(2S_1)^{p-1}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}2k^{p+1}({}_pC_1k^{p-1}+{}_pC_3k^{p-3}+{}_pC_5k^{p-5}+\cdots\cdots)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}2k^p(k^p+{}_pC_2k^{p-2}+{}_pC_4k^{p-4}+\cdots\cdots)$$

であるから

$$3S_2(2S_1)^{p-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}2k^{p+1}({}_pC_1k^{p-1}+{}_pC_3k^{p-3}+{}_pC_5k^{p-5}+\cdots\cdots)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}k^p(k^p+{}_pC_2k^{p-2}+{}_pC_4k^{p-4}+\cdots\cdots)$$
$$=(2p+1)S_{2p}+(2{}_pC_3+{}_pC_2)S_{2p-2}+\cdots\cdots$$

よって，数学的帰納法により $S_{2p}$ は必ず $S_2$ を因数にもつ。
また，$S_{2p}$ は，$S_1$ の $p-1$ 次式で，$S_2{S_1}^{p-1}$ の係数は $\dfrac{3\cdot 2^{p-1}}{2p+1}$ である。

**《参考文献》**

〔1〕 新課程　チャート式数学Ⅱ＋B，数研出版

（福島県立葵高等学校）