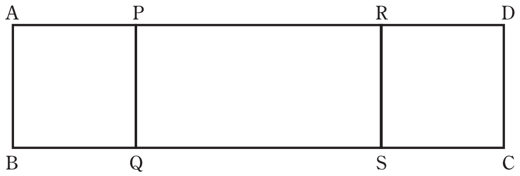
正接の整数問題とフィボナッチ数列

武田（たけだ）　眞史（まさふみ）

§1. はじめに

きっかけは元同僚が送ってきた問題だった。



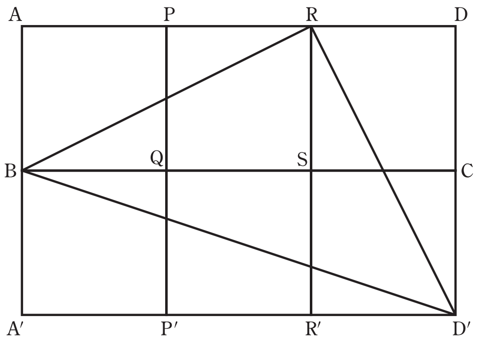
$AB=1$ である長方形 ABCD に図のように AB の平行線 PQ，RS を引く。

次のとき **∠AQB＝∠ASB＋∠ACB** となることを示せ。

(1)　BQ＝QS＝SC＝1

(2)　BQ＝3，QS＝2，SC＝3

(1)は有名問題。点 A，P，R，C を直線 BC に関して対称に移した点をそれぞれ A′，P′，R′，D′ とする。



∠ASB＝∠RBC，∠ACB＝∠D′BC より

　∠ASB＋∠ACB＝∠RBC＋∠D′BC

　　　＝∠RBD′　……①

△RBD′ は直角二等辺三角形であるから

　∠RBD′＝45°　……②

また △BAQ も直角二等辺三角形より

　∠AQB＝45°　……③

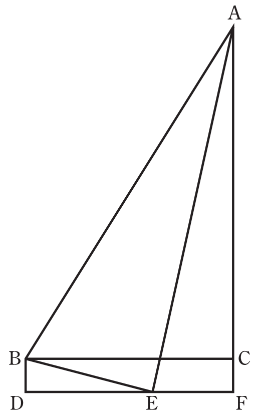
①～③より　∠AQB＝∠ASB＋∠ACB　終

§2. (2)の解法①

(2)も正接の加法定理を使えば何の苦もないのですが，元同僚はそれを使わずに解きたい，と。

この問題を共有していた現同僚は生徒にこの問題を投げかけたところ，ある生徒がこんな証明を持ってきたそう。元の図の ∠ACB＝α，∠ASB＝β，∠AQB＝γ とすると，$\alpha+\beta=\gamma$ を示せばよい。

【証明１】



　BD＝1，DE＝8，EF＝5，FA＝40

∠BDE＝∠EFA＝∠BCA＝90° とすると，

△BED∽△EAF であるから

　∠BED＝∠EAF＝α

∠BEA＝90°，BE：FA＝1：5 より　∠BAE＝β

また，BC＝DE＋EF＝13，AC＝AF－CF＝39 であるから

BC：CA＝1：3，∠BCA＝90° より　∠BAC＝γ

∠BAC＝∠EAF＋∠BAE より

　$\gamma=\alpha+\beta$　終

これはこれでキレイではあるけれど，

$\tan\alpha=\dfrac{1}{8}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{5}$，$\tan\gamma=\dfrac{1}{3}$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5}}$$

$$=\frac{5+8}{5\cdot8-1} \quad \cdots\cdots①$$

$$=\frac{1}{3}$$

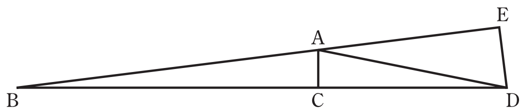
$$=\tan\gamma$$

の①を上手く図にしたなぁ，と関心はしましたが，根本的には加法定理を使っているのと大差ないなぁ…と。

§3. (2)の解法②

で，私は2つの角を足すなら三角形の外角でしょ，と，こんな図を描いてみました。

【証明 2】



$\angle ACB=\angle DEA=90°$，$AC=1$，$BC=8$，$CD=5$

とすると

$\angle ABC=\alpha$，$\angle ADC=\beta$

三角形の外角より

$\angle DAE=\alpha+\beta$ ……①

三平方の定理により

$AB=\sqrt{65}$ ……②

$\triangle ABC\backsim\triangle DBE$ より

$$BE=\frac{BC\cdot BD}{AB}=\frac{104}{\sqrt{65}},\quad ED=\frac{AC\cdot BD}{AB}=\frac{13}{\sqrt{65}} \quad \cdots\cdots③$$

また，②，③より

$$AE=BE-AB=\frac{39}{\sqrt{65}}$$

これと③より

$ED:AE=1:3$ であるから　$\angle DAE=\gamma$

①と合わせて

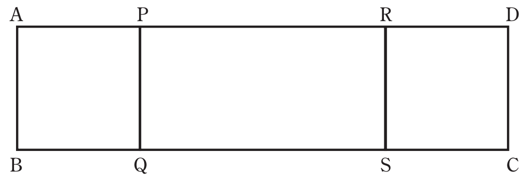
$\alpha+\beta=\gamma$ 終

§4. 類題作成

この2つの証明を経て思ったこと。元の問題の $BQ=3$，$QS=2$，$SC=3$ という設定は問題にひとひねり与えるためのもので，$BQ=3$，$BS=5$，$BC=8$ から考えた方が証明はしやすい。

問題が解けたら，類問を作りたくなるのが数学教員の性。

元の問題は，



(1) $BQ=1$，$BS=2$，$BC=3$

(2) $BQ=3$，$BS=5$，$BC=8$

これ以外に，$\angle ACB=\alpha$，$\angle ASB=\beta$，$\angle AQB=\gamma$ として，$\alpha+\beta=\gamma$ となる BQ，BS，BC の自然数である長さのセットはないだろうか。

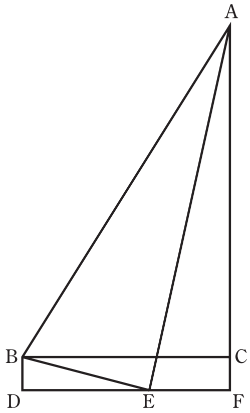
【証明 1】，**【証明 2】**とも α，β を角に持つ直角三角形の辺の長さから γ という角をもつ三角形を作るという手法だったので，同様に

自然数 a，b に対して，$BC=a$，$BS=b$ として，$\alpha+\beta$ という角に対する正接が単位分数になれば $BQ=c$ も自然数となる。

という方針で考えていく。

§5. 作成方法 1

【証明 1】の手法を使うと，



BD＝1，DE＝a，EF＝b，FA＝ab,
∠BDE＝∠EFA＝∠BCA＝90° とすると，
△BED∽△EAC であるから

∠BED＝∠EAF＝α

∠BEA＝90°，BE：FA＝1：b より，
∠BAE＝β であるから

∠BAC＝∠EAF＋∠BAE＝$\alpha+\beta$

また

BC＝DE＋EF＝$a+b$，AC＝AF－CF＝$ab-1$

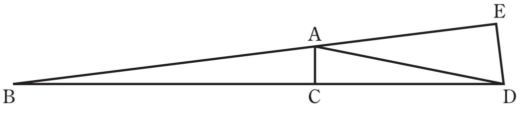
ゆえに

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{a+b}{ab-1}$$

これが単位分数となればいいのだから，
$ab-1$ が $a+b$ で割り切れればいい。
が，分子分母とも 2 変数ではこれを満たすセットを探すのは一苦労。

§6. 作成方法 2

では**【証明 2】**の手法を使うと，



∠ACB＝∠DEA＝90°，AC＝1，BC＝a，CD＝b とすると，
∠ABC＝α，∠ADC＝β となる。
三角形の外角より

∠DAE＝$\alpha+\beta$ ……①

三平方の定理により

AB＝$\sqrt{a^2+1}$ ……②

△ABC∽△DBE より

$$\mathrm{BE}=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}=\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+1}} \quad\cdots\cdots③$$

$$\mathrm{ED}=\frac{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}=\frac{1\cdot(a+b)}{\sqrt{a^2+1}} \quad\cdots\cdots④$$

また，②，③より

$$\mathrm{AE}=\mathrm{BE}-\mathrm{AB}=\frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{a^2+1} \quad\cdots\cdots⑤$$

$$=\frac{ab-1}{\sqrt{a^2+1}} \quad\cdots\cdots⑥$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{AE}}=\frac{\dfrac{(a+b)}{\sqrt{a^2+1}}}{\dfrac{ab-1}{\sqrt{a^2+1}}}=\frac{a+b}{ab-1} \quad\cdots\cdots⑦$$

これが単位分数となればいいのだから，
$ab-1$ が $a+b$ で割り切れればいい。
と，やってしまうと**【証明 1】**の手法でやるのと同じ結果になってしまう。
これは⑦で AE の長さとして⑥を使ったからで，⑤を使うと

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{AE}}$$

$$=\frac{\dfrac{(a+b)}{\sqrt{a^2+1}}}{\dfrac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+1}}-\sqrt{a^2+1}}$$

$$=\frac{1}{a-\dfrac{a^2+1}{a+b}}$$

これが単位分数となればいいのだから，
a^2+1 が $a+b$ で割り切れればいい。 ……⑧
これならいくらでも組み合わせを作ることができる。
例えば

$a=2$ とすると　$a^2+1=5$

これが $a+b$ で割り切れればいいので　$b=3$
このとき，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{c}$ とすると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{a+b}{ab-1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{c} \text{ より} \quad c=1$$

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 1)$ という組み合わせができる。
(※§4では $a>b$ の設定であったが，§6の論の進め方は a，b の大小は問わない。)

§7. (a, b, c) の組み合わせ

ではこのような組み合わせは無限にできるのか。感覚的には当然，無限にできる。

まず，§6 の手法で $a<b$ の制限を付けて組み合わせを作っていくと，

a	b	c	
2	3	1	①②
3	7	2	①
4	13	3	①
5	8	3	②
5	21	4	①
6	31	5	①
7	18	5	
7	43	6	①
8	57	7	①
9	32	7	
9	73	8	①
10	91	9	①
11	50	9	
11	111	10	①
12	17	7	
12	133	11	①
13	21	8	②
13	72	11	
13	157	12	①

無限に作れるのは当然ですね。

表で右の欄に①を付けた組は

a^2+1 が $a+b$ で割り切れればいいので，

$b=a^2-a+1$ としたものである。このとき

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{a+b}{ab-1}$$
$$=\frac{a^2+1}{a(a^2-a+1)-1}$$
$$=\frac{1}{a-1}$$

これが $\dfrac{1}{c}$ になるので　　$c=a-1$

$a>2$ で $a^2-a+1>a$ であるから

$$(a,\ b,\ c)=(a,\ a^2-a+1,\ a-1)\quad(a\in\mathbf{N})$$

はすべて条件を満たす。また重複もないので，組み合わせは無限に存在する。

§8. フィボナッチ数列

左の表で右の欄に②を付けた 3 つの組を見る。

初めの 2 つ $(2,\ 3,\ 1)$，$(5,\ 8,\ 3)$ は §1 で最初に与えられた問題で，この 2 つを見たときに予感はあった。左の表はなぜ $a=13$ までの表なのか？

それは $(13,\ 21,\ 8)$ の組が出てくることを予想していたから。これらの組に現れる数を重複を消して昇順に並べると 1，2，3，5，8，13，21。初項を除いた**フィボナッチ数列**となっている。

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{k+2}=F_{k+1}+F_k\quad(k\in\mathbf{N})\quad\cdots\cdots③$$

とすると，②を付けた組は

$$(a,\ b,\ c)=\begin{cases}(F_3,\ F_4,\ F_2)\\(F_5,\ F_6,\ F_4)\\(F_7,\ F_8,\ F_6)\end{cases}$$

であり，この規則性が続くなら，

$$(a,\ b,\ c)=(F_{2n+1},\ F_{2n+2},\ F_{2n})\quad(n\in\mathbf{N})\quad\cdots\cdots④$$

は

$$\frac{a+b}{ab-1}=\frac{1}{c}$$

を満たすはずである。

これはフィボナッチ数列の有名な性質，

$$F_kF_{k+3}-F_{k+1}F_{k+2}=(-1)^{k-1}\quad(k\in\mathbf{N})\quad\cdots\cdots⑤$$

からすぐに導ける。

⑤において，$k=2n$ とすると

$$F_{2n}F_{2n+3}-F_{2n+1}F_{2n+2}=-1$$
$$F_{2n}F_{2n+3}=F_{2n+1}F_{2n+2}-1$$
$$\frac{F_{2n+3}}{F_{2n+1}F_{2n+2}-1}=\frac{1}{F_{2n}}$$

③より

$$\frac{F_{2n+1}+F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2}-1}=\frac{1}{F_{2n}}$$

④の関係を代入すると

$$\frac{a+b}{ab-1}=\frac{1}{c}$$

が成立する。

フィボナッチ数列には

$$F_kF_{k+2}-{F_{k+1}}^2=(-1)^{k-1}\quad(k\in\mathbf{N})\quad\cdots\cdots⑥$$

という性質もある。これは今回の話と関わってこないのか？

今度は $k=2n+1$ とすると，⑥は

$$F_{2n+1}F_{2n+3}-{F_{2n+2}}^2=1$$

$$F_{2n+1}F_{2n+3}={F_{2n+2}}^2+1$$

$$\frac{F_{2n+3}}{{F_{2n+2}}^2+1}=\frac{1}{F_{2n+1}}$$

これに③，④を用いると $\dfrac{a+b}{b^2+1}=\dfrac{1}{a}$

§6の最後に書いたように，この議論は a，b の大小は問わないので，④において a，b は入れ替えても構わない。すると

$$\frac{a+b}{a^2+1}=\frac{1}{b} \quad \cdots\cdots⑦$$

も成り立つ。つまり，§6の⑧

「a^2+1 が $a+b$ で割り切れればいい。」

に繋がってくるわけです。

ここでもう一つ疑問がわく。④の組は

「a^2+1 が $a+b$ で割り切れればいい。」

を満たすわけで，そうすると，そのときの $\dfrac{a^2+1}{a+b}$ の値はどうなるのか。

つまり，$\dfrac{{F_{2n+1}}^2+1}{F_{2n+1}+F_{2n+2}}$ の値はどうなるのか。

③の関係を用いると，$\dfrac{{F_{2n+1}}^2+1}{F_{2n+3}}$ の値はどうなるのか，ということになる。まずは実験。表にしてみる。

n	F_{2n+1}	F_{2n+3}	$\dfrac{{F_{2n+1}}^2+1}{F_{2n+3}}$
1	2	5	1
2	5	13	2
3	13	34	5
4	34	89	13

この並びはほぼ決定ですね。

$$\frac{{F_{2n+1}}^2+1}{F_{2n+3}}=F_{2n-1}$$

と推測される。これを変形すると

$$F_{2n+3}F_{2n-1}-{F_{2n+1}}^2=1$$

⑤，⑥の性質からすると，

$$F_{k+4}F_k-{F_{k+2}}^2=(-1)^{k-1} \quad (k\in\mathbf{N}) \quad \cdots\cdots⑧$$

これが成立しそう。

実際に数学的帰納法で面倒ではあるが証明もできる。

§9. まとめ

§8の⑤，⑥の性質は私も知っていた。

知っている人は⑧の性質も知っているのかもしれないが，私は初めて見た。

一見関係なさそうなところからフィボナッチ数列に繋がってくるあたり，フィボナッチ数列，侮りがたし，です。

（愛知県　海陽中等教育学校）