答えがきれいになるような問題作成法 2
～ 2 つの放物線の共通接線を求める問題～

はしぐち　まさし
橋口　正

§1. はじめに

以前，〔1〕で「答えがきれいになる問題作成法」について掲載して頂いた。ここでの「きれいな答え」とは，有理数(できればあまり大きくない整数)のことである。授業や個別指導において生徒に問題を提示する際，特に学びはじめの時は，できるだけ簡単な答えになるような問題を提示した方が良いと思われる。解法の理解を深めるためのドリルであるはずなのに，途中の計算や答えに無理数や分数があると，計算で手間取り，問題の本質を見失ったり，答えが出せなくなるおそれがあるからである。更に，作問は簡単にできる方が実用的である。例えば，

> 放物線 $y=3x^2+x+4$ および
> $y=-x^2+x-8$ の共通接線を求めよ。

の答えは $y=-5x+1$，$y=7x+1$ であり，接点の x 座標は $y=-5x+1$ のとき $x=-1$，3，$y=7x+1$ のとき $x=1$，-3 となり，放物線と接線の係数も含めてすべて整数である。この例のように，今回は

> **問題 P**
> 　2 つの放物線(係数は全て整数)をどのように決めれば，共通接線の係数および接点の x 座標をすべて有理数(できれば整数)にできるか。

について，容易に作問する方法の考察を報告する。その際

> 直線 $y=mx+n$ は，点$(p,\ mp+n)$において放物線 $y=a(x-p)^2+mx+n$ に接する。

という事実を多用している。まず

$a\neq0$，$b\neq0$，$p\neq q$ かつ a，b，p，q，m，n

はすべて整数として

$C_1：y=a(x-p)^2+mx+n$　……①

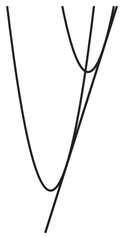
$C_2：y=b(x-q)^2+mx+n$　……②

$\ell_1：y=mx+n$

とし，以後，本稿の全体にわたって，C_1，C_2，ℓ_1 を上記の通りとする。このとき，2 つの放物線 C_1，C_2 は直線 ℓ_1 にそれぞれ $x=p$，$x=q$ で接している。ℓ_1 と異なる共通接線が存在するとき，それを ℓ_2 とする。ℓ_2 の方程式の係数および C_1，C_2 との接点の x 座標は有理数となるが，それは後で確認する。

このことを踏まえて，**問題 P** を考察する。

§2. $a=b$ のとき



この場合の問題作成は，極めて容易である。例えば，x^2 の係数を 2，2 つの放物線の接点の x 座標をそれぞれ $x=-1$，2，共通接線の方程式を $y=3x-1$ としたいと思えば，2 つの放物線の方程式をそれぞれ

$$y=2(x+1)^2+3x-1=2x^2+7x+1$$
$$y=2(x-2)^2+3x-1=2x^2-5x+7$$

とすればよい。(これらの係数は，$a=b$，$p\neq q$ かつ整数であれば，すべて適当で良い。)教師は，答えの ℓ_1 が $y=3x-1$ であることや接点の x 座標もすべて知っている上で(自分で決めたのだから知っているのは当たり前ですが)

> **問題**：$y=2x^2+7x+1$ と $y=2x^2-5x+7$ の
> 　　共通接線の方程式を求めよ。

という問題をすぐに生徒に提示することができる。作り方から，接点の座標や接線の方程式の係数もすべて整数である。手順を確認すると

(i)　x^2 の係数，接点の x 座標を決める。 (ii)　接線の方程式を決める。 (iii)　放物線の方程式を降べきの順に展開する。

　このとき，共通接線(先ほどの例では $y=3x-1$)，および放物線の方程式の係数があまり大きくならないように決める。

　一般に，x^2 の係数を $a(\neq 0)$，接点の x 座標を $x=p,\ q\,(p\neq q)$，共通接線の方程式を $y=mx+n$ とすると，２つの放物線の方程式は

$$y=a(x-p)^2+mx+n,$$
$$y=a(x-q)^2+mx+n$$

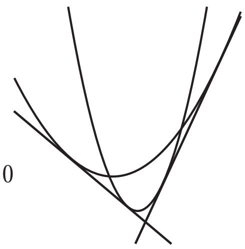
であり，これを展開して出題すればよい。

§3. $a\neq b$ のとき

　C_1, C_2 をそれぞれ①，②と決めた段階で，問題作成自体は終了している。つまり，**問題P** は一応解決している。これらを展開して出題すればよい。まず，①，②の位置関係を明確にして ℓ_2 の存在を確認する。ただし，ℓ_2 の係数は整数とは限らない。

(i)　a と b が同符号のとき

　$a>b>0$ としても一般性を失わない。①と②を連立して，①−②とすると

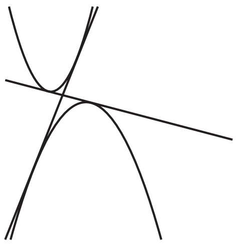


$$a(x-p)^2-b(x-q)^2=0$$
$$\iff \{\sqrt{a}\,(x-p)-\sqrt{b}\,(x-q)\}\times\{\sqrt{a}\,(x-p)+\sqrt{b}\,(x-q)\}=0$$

となり実数の範囲で因数分解できるので，C_1 と C_2 は，異なる２点で交わる。

(ii)　a と b が異符号のとき

　$a>0>b$ としても，一般性を失わない。①−②とすると



$$a(x-p)^2-b(x-q)^2>0$$

となるから，C_1 が下に凸，C_2 が上に凸であり，C_1 と C_2 は，共有点をもたない。

　グラフより，(i)，(ii)のいずれの場合も，C_1 と C_2 は異なる２本の共通接線をもつと考えて良い。(厳密な議論は省略します)

①より $y'=2a(x-p)+m$ であるから，C_1 の $x=t$ に対応する接線(ℓ_t とする)の方程式は

$$\begin{aligned}y&=\{2a(t-p)+m\}(x-t)+a(t-p)^2+mt+n\\&=\{2a(t-p)+m\}x-2a(t-p)t\\&\qquad\qquad+a(t-p)^2+n\\&=2a(t-p)x-a(t^2-p^2)+mx+n\end{aligned}$$
$$\cdots\cdots(*)$$

　ℓ_t が C_2 に接する条件を求めるために(＊)と②を連立すると

$$b(x-q)^2=2a(t-p)x-a(t^2-p^2)$$
$$bx^2-2\{bq+a(t-p)\}x+bq^2+a(t^2-p^2)=0$$

この式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=[-\{bq+a(t-p)\}]^2-b\{bq^2+a(t^2-p^2)\}\\&=2abq(t-p)+a^2(t-p)^2-ab(t^2-p^2)\\&=a(t-p)\{2bq+a(t-p)-b(t+p)\}\\&=a(t-p)\{(a-b)t-(a+b)p+2bq\}\\&=a(t-p)\{(a-b)t-(a-b)p-2bp+2bq\}\\&=a(t-p)\{(a-b)(t-p)-2b(p-q)\}\end{aligned}$$

ℓ_t が C_2 の接線である。$\iff D=0$

$$\iff t=p,\ p+2b\frac{p-q}{a-b}$$

ゆえに，C_1 と ℓ_2 の接点の x 座標を r とすると

$$r=p+2b\frac{p-q}{a-b}$$

となる。

$t=r$ を(＊)に代入したものが ℓ_2 であるが，後述するように，代入せずに ℓ_2 を求める。

　a，b，p，q，m，n はすべて整数であるから，ℓ_2 の係数はすべて有理数であることがわかる。 すなわち①，②を決めた段階で ℓ_1 の係数，接点の x 座標はすべて整数であり，ℓ_2 の係数はこの段階では有理数である。よって，**$2b\dfrac{p-q}{a-b}$ が整数になるように a，b，p，q を決めれば，C_1 の接線の係数と接点の座標がすべて整数となる。特に，$|a-b|=1$ または２のときは，接線の係数と接点の座標はすべて整数となる。**

　また，C_1 と C_2 の立場を入れ替えると，C_2 と ℓ_1，ℓ_2 との接点の x 座標はそれぞれ

$$q,\ q+2a\frac{p-q}{a-b}$$

となる。

ここで　$q+2a\dfrac{p-q}{a-b}=q+2(a-b+b)\dfrac{p-q}{a-b}$

$$=q+2(p-q)+2b\frac{p-q}{a-b}$$
$$=q+2(p-q)+r-p$$
$$=p-q+r$$

より **C_2 と ℓ_2 の接点の座標も整数となることがわかる。**

まとめると

> $a \neq b$，$p \neq q$，$a \neq 0$，$b \neq 0$ かつ a，b，p，q，m，n はすべて整数として，２つの放物線
> $C_1：y=a(x-p)^2+mx+n$　……①
> $C_2：y=b(x-q)^2+mx+n$　……②
> は，２本の共通接線 ℓ_1，ℓ_2 をもつ。
> ℓ_2 と C_1 の接点の x 座標を r とすると
> $r=p+2b\dfrac{p-q}{a-b}$　……③
> であり，ℓ_1，ℓ_2 の方程式は
> $\ell_1：y=mx+n$
> $\ell_2：y=a(x-p)^2+mx+n-a(x-r)^2$

③の r だけは，覚えておく必要がある。

改めて手順を確認すると

1．２つの放物線の x^2 の係数，および共通接線との接点の x 座標を(整数として)決める。
このとき，r が整数となるように決めると共通接線の係数はすべて整数となる。

2．共通接線 $y=mx+n$ を決める。
このとき，２つの放物線の係数があまり大きくならないように注意する。

3．２つの放物線を $y=ax^2+bx+c$ の形で生徒に提示する。

§4．作成例

§3. で示した通り，$a-b$ を $2b(p-q)$ の約数であるように選ぶことで，答えの係数や接点はすべて整数となる。その際，答えの係数があまり大きな数にならないように注意したい。以後，$a \neq b$ のときを考える。

例 1

a，b，p，q，m，n を適当な整数にすると，接点が整数とは限らない。例えば，ℓ_1 を $y=x+1$ として

$y=(x-1)^2+x+1=x^2-x+2$

$y=-2(x+1)^2+x+1=-2x^2-3x-1$

とすると

$r=1+2\cdot(-2)\cdot\dfrac{1-(-1)}{1-(-2)}=-\dfrac{5}{3}$

ℓ_2 は

$$y=x^2-x+2-\left(x+\frac{5}{3}\right)^2=-\frac{13}{3}x-\frac{7}{9}$$

係数はすべて有理数となるが，整数ではない。

例 2

$a=3$，$b=-1$，$p=-1$，$q=3$，
$mx+n=-5x+1$

とすると

$C_1：y=3(x+1)^2-5x+1=3x^2+x+4$　……④
$C_2：y=-(x-3)^2-5x+1=-x^2+x-8$　……⑤

C_1 と ℓ_2 の接点の x 座標は

$r=-1+2\cdot(-1)\cdot\dfrac{-1-3}{3-(-1)}=1$

となるから，ℓ_2 の方程式は

$y=3x^2+x+4-3(x-1)^2=7x+1$　……⑥

確認のために，⑤と⑥を連立すると

$-x^2+x-8=7x+1 \iff (x+3)^2=0$

となるから，確かに⑥は⑤の接線であり，接点の x 座標は $x=-3$ であることがわかる。

例 3　$C_1：y=3(x-1)^2+2x-1=3x^2-4x+2$
$C_2：y=(x-0)^2+2x-1=x^2+2x-1$

とすると

$\ell_1：y=2x-1$，$r=1+2\cdot1\cdot\dfrac{1-0}{3-1}=2$

$\ell_2：y=3x^2-4x+2-3(x-2)^2=8x-10$

よって，共通接線は　$y=2x-1$，$y=8x-10$

例 4

比較的簡単に作ることができる例として
$p=a+c$，$q=b+c$（c は整数）すなわち

$y=a(x-a-c)^2+mx+n$，
$y=b(x-b-c)^2+mx+n$

と決める。このとき

$r=p+2b\dfrac{p-q}{a-b}=p+2b\dfrac{(a+c)-(b+c)}{a-b}$
$=p+2b\,(=a+c+2b)$

となり，r は必ず整数になる。例えば

$a=2$，$b=-1$，$c=-2$，$mx+n=-4x+3$

とすると

$C_1：y=2(x-0)^2-4x+3=2x^2-4x+3$

C_2：$y=-(x+3)^2-4x+3=-x^2-10x-6$

$r=0+2\cdot(-1)=-2$　　となる。

よって，ℓ_2 は

$y=2x^2-4x+3-2(x+2)^2=-12x-5$

これが，C_2 に接していることを確認すると

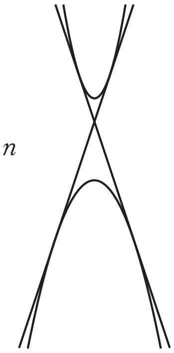
$-x^2-10x-6=-12x-5 \iff (x-1)^2=0$

となり重解となるので，確かに接している。

よって共通接線は，$y=-4x+3$，$y=-12x-5$

例 5（特殊なケース）

2つの放物線の軸が等しい場合



$$y=a(x-p)^2+mx+n$$
$$=a(x^2-2px+p^2)+mx+n$$
$$=a\left\{x^2-\left(2p-\frac{m}{a}\right)x\right\}+ap^2+n$$

より，C_1 の軸は　　$x=p-\dfrac{m}{2a}$

同様にして，C_2 の軸は

$$x=q-\frac{m}{2b}$$

$$p-\frac{m}{2a}=q-\frac{m}{2b}$$

$$\iff m=-2ab\frac{p-q}{a-b}$$

よって，m は a，b，p，q に依存するが，a，b，p，q を $2b\dfrac{p-q}{a-b}$ が整数になるように選ぶことで，接線の係数や接点の座標をすべて整数にすることができる。

例えば

C_1：$y=3(x+1)^2+mx+n$

C_2：$y=-(x-1)^2+mx+n$

$$m=-2\cdot3\cdot(-1)\cdot\frac{-1-1}{3-(-1)}=-3$$

n は適当でよいので，$n=-2$ とすると

C_1：$y=3(x+1)^2-3x-2=3x^2+3x+1$

C_2：$y=-(x-1)^2-3x-2=-x^2-x-3$

$$r=-1+2\cdot(-1)\cdot\frac{-1-1}{3-(-1)}=0$$

$\ell_2=3x^2+3x+1-3(x-0)^2=3x+1$

《参考文献》

〔1〕 数研通信 79 号
橋口　正「答がきれいになるような問題作成法
—放物線の接線と円の接線を求める問題—」

（宮崎県立宮崎大宮高等学校）