【誤答】を使った授業実践の提案

服部(はっとり)　慎吾(しんご)

§1. はじめに

以前，『全ての三角形が二等辺三角形であることの証明⁉』というのを見た。もちろん，この証明は間違っているが，読んでいてもどこが間違っているのか，なかなかわからない。実は，これは誤った証明として有名であり，興味のある方はぜひ調べていただきたい。これをヒントに，誤答を使って授業をすれば，生徒の深い学びにつながるのではと考えた。それを勝手に〈誤答問題〉と称し，教材として作成したものがあり，その内の数問を紹介する。

元々，生徒の誤答や間違いを訂正し指摘することは，世の中の数学教師が常日頃やっていることである。私自身が，そのようなことをしていく中で数学を深く理解してきたという実感がある。そうであれば，その体験をそのまま生徒にさせてみようというのがこの取り組みのきっかけである。以降に，その**問題**・**【誤答】**・**【正しい解答】**や**【別解】**を記載する。

§2. 誤答問題

※以降すべて，**問題**の前に，『次の**問題**の**【誤答】**は「どこが」，「なぜ」間違っているのか説明せよ。また，正しい答えを求めよ。』の文言がついているものとする。

1 〈2次不等式〉

問題　2次不等式 $-3x^2+8x-6>0$ を解け。

【誤答】

不等式の両辺に -1 を掛けて　$3x^2-8x+6<0$

ここで，$3x^2-8x+6=0$ とすると

$$x=\frac{4\pm\sqrt{2}i}{3}$$

よって　$\dfrac{4-\sqrt{2}i}{3}<x<\dfrac{4+\sqrt{2}i}{3}$

「どこが」間違っているかは明らかである。しかし，「なぜ」間違っているかを正確にはっきり説明するのは難しいであろう。2次不等式の解法のみを習得して，本質を理解していないとこのようなことになる。さらに，虚数の理解が不十分であると，答えの形 $\dfrac{4-\sqrt{2}i}{3}<x<\dfrac{4+\sqrt{2}i}{3}$ を見ても違和感を感じない。同時に，虚数には大小関係が成立しないことも理解させたい。

【正しい解答】

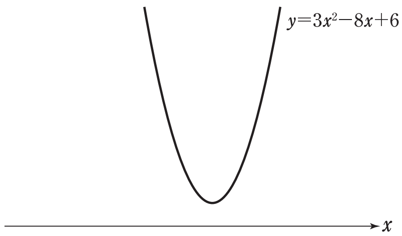
不等式の両辺に -1 を掛けて　$3x^2-8x+6<0$

2次方程式 $3x^2-8x+6=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-3\cdot6=-2<0$$

x^2 の係数は正であるから，すべての実数 x について $3x^2-8x+6>0$ が成り立つ。

よって，与えられた不等式の解はない。



2 〈平方根〉

問題　a を実数とする。等式 $\sqrt{a^2-4a+4}=5$ が成り立つとき，a の値を求めよ。

【誤答】

$\sqrt{a^2-4a+4}=5$ より

$\sqrt{(a-2)^2}=5$

$a-2=5$

よって　$a=7$

こちらも高校生がよくする間違いである。

$(\sqrt{a-2})^2=5$ であれば，$a-2=5$ であるが，本問のようにルートの中が 2 乗のときには注意が必要である。実際に出た値の $a=7$ と $a=-3$ を左辺に代入してみることで，どちらも 5 になることが確認できる。この問題を通して，『実数 X について，等式 $\sqrt{X^2}=X$ は必ずしも成り立たない』ことの理解を深めることができる。

> **【正しい解答】**
> $\sqrt{a^2-4a+4}=5$ より
> $\sqrt{(a-2)^2}=5$
> $|a-2|=5$
> $a-2=\pm 5$
> よって　$a=7,\ -3$

3 〈指数不等式〉

> **問題**　不等式 $4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+7\left(\frac{1}{2}\right)^x-2<0$ を解け。
>
> **【誤答】**
> 与式から　$4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+7\left(\frac{1}{2}\right)^x-2<0$
> $\left\{4\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x+2\right\}<0$
> よって　$-2<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{4}$　…… ①
> また　$\left(\frac{1}{2}\right)^x>0$　…… ②
> ①，②から　$0<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{4}$
> したがって　$0<x<2$

最後の『したがって　$0<x<2$』が間違っている。指数についての理解が不十分だとやってしまいそうな間違いである。ここだけで 2 つの間違いがある。まずは，『$0<\left(\frac{1}{2}\right)^x$ から，$0<x$』と，もう一つは，『$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{4}$ から，$x<2$』である。**【正しい解答】**と見比べていただきたい。

> **【正しい解答】**
> (下から二行目までは**【誤答】**と同じなので省略)
> ①，②から　$0<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{4}$
> $0<\left(\frac{1}{2}\right)^x$ より，x はすべての実数を満たす。　…… ③
> また，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\frac{1}{4}$ より　$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^2$
> 底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$2<x$　…… ④
> したがって，求める解は，③，④より　$2<x$

4 〈対数方程式 1〉

> **問題**　方程式 $\log_2 x+\log_2 3x=2$ を解け。
>
> **【誤答(1)】**
> 真数は正であるから　$x>0$　…… ①
> 方程式から　$\log_2 x+\log_2 3x=2\log_2 2$
> よって　$\log_2 x+\log_2 3x=\log_2 4$
> ゆえに　$x+3x=4$
> $4x=4$
> したがって　$x=1$
> これは①を満たす。
>
> **【誤答(2)】**
> 真数は正であるから　$x>0$　…… ①
> 方程式から　$\log_2 x+\log_2 3+\log_2 x=2\log_2 2$
> よって　$2\log_2 x=\log_2 4-\log_2 3$
> ゆえに　$2\log_2 x=\log_2 \frac{4}{3}$
> $2x=\frac{4}{3}$
> したがって　$x=\frac{2}{3}$
> これは①を満たす。

誤答(1)，誤答(2)ともに対数の公式の使い方に間違いがあるが，どのように間違いの理由を説明すればよいだろうか。誤答(1)の例をあげておく。

(例)　$\log_2 x=p$，$\log_2 3x=q$ とおくと
$\log_2 x+\log_2 3x=2$ は $p+q=2$ と表せる。
底を 2 とすると　$2^{p+q}=4$ より $2^p\cdot 2^q=4$
ここで，$2^p=x$，$2^q=3x$ なので $x\cdot 3x=4$ となり，$x+3x=x\cdot 3x$ で矛盾する。

> **【正しい解答】**
> 真数は正であるから　$x>0$　…… ①
> 方程式から　$\log_2 x+\log_2 3x=2$
> よって　$\log_2 3x^2=2$
> ゆえに　$3x^2=4$
> ①より　$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【別解】

真数は正であるから　$x>0$　…… ①

方程式から　$\log_2 x+\log_2 3+\log_2 x=2$

よって　$2\log_2 x=\log_2 4-\log_2 3$

ゆえに　$\log_2 x^2=\log_2 \dfrac{4}{3}$

$x^2=\dfrac{4}{3}$

①より　$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

5 〈対数方程式 2〉

問題　方程式 $\log_2 x^2=1$ を解け。

【誤答】

$\log_2 x^2=1$ より

$2\log_2 x=1$

$\log_2 x=\dfrac{1}{2}$

$x=\sqrt{2}$

これはなかなか気づきにくいのではないかと思われる。対数の公式 $\log_a M^r=r\log_a M$ を使うだけなのだが，ここで注意が必要である。$M>0$ であることを意識していないとやってしまう間違いである。この問題を通して，公式を使う際には，条件について十分注意して使わないといけないという指導のきっかけにしたいところである。

【正しい解答】

真数は正より，$x^2>0$ であるから　$x\neq 0$

…… ①

$\log_2 x^2=1$ より

$2\log_2|x|=1$

$\log_2|x|=\dfrac{1}{2}$

$|x|=\sqrt{2}$

$x=\pm\sqrt{2}$

これは①を満たす。

【別解】

真数は正より，$x^2>0$ であるから　$x\neq 0$

…… ①

$1=\log_2 2$ であり，$\log_2 x^2=1$ であるから

$\log_2 x^2=\log_2 2$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

これは①を満たす。

6 〈確率〉

問題　3 枚のコインを投げるとき，表が 1 枚だけ出る確率を求めよ。

【誤答】

表の出方は，

[1]　表が 3 枚で裏が 0 枚，

[2]　表が 2 枚で裏が 1 枚，

[3]　表が 1 枚で裏が 2 枚，

[4]　表が 0 枚で裏が 3 枚の 4 通りであるから，

求める確率は　$\dfrac{1}{4}$

こちらも一見すると間違いなさそうに思ってしまう。「場合の数」と「確率」の違いがわかっていないことから起こる間違いである。確率は，場合の数と違い見た目は同じコインであっても区別をして考えるという基本的な考え方がわかっていないとこのような間違いをする。この問題を通して，確率の基本的な考え方を確認できる問題である。

【正しい解答】

コインをそれぞれ A，B，C とする。

コインAは表，コインBは裏，コインCは裏が出ることを (表，裏，裏) と書くことにする。

この試行における全事象は，

表 3 枚 (表，表，表)

表 2 枚 (表，表，裏)，(表，裏，表)，(裏，表，表)

表 1 枚 (表，裏，裏)，(裏，表，裏)，(裏，裏，表)

表 0 枚 (裏，裏，裏)

の全 8 通りで，そのうち表が 1 枚だけ出るのは 3 通りであるから求める確率は　$\dfrac{3}{8}$

7 〈相加平均と相乗平均〉

問題　$a>0$，$b>0$ のとき，

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$ の最小値を求めよ。

【誤答】

$a>0$，$\dfrac{1}{b}>0$ であるから，

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{b}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \cdots\cdots ①$$

また，$b>0$，$\dfrac{9}{a}>0$ であるから，

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$b+\frac{9}{a}\geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{9}{a}}=6\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$(\text{左辺})=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot 6\sqrt{\frac{b}{a}}=12$$

したがって，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$ の最小値は　12

この問題は，さまざまなところに類題があると思われるが，本当の意味で相加平均と相乗平均の関係をわかっていないとやってしまいがちな間違いである。生徒には，間違いの理由を正確に説明できるように指導したい。さらに，本問を通して，相加平均と相乗平均については，2 数が正である場合にしか使えないということにも同時に触れておきたいところである。間違っている理由は次のように説明できる。

①において，等号が成り立つのは

$a=\dfrac{1}{b}$ すなわち $ab=1$　…… ③ のときである。

②において，等号が成り立つのは

$b=\dfrac{9}{a}$ すなわち $ab=9$　…… ④ のときである。

③，④を同時に満たす a，b は存在しない。

よって，$(\text{左辺})=\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot 6\sqrt{\dfrac{b}{a}}=12$

は不適切である。

【正しい解答】

$$(\text{左辺})=ab+9+1+\frac{9}{ab}=ab+\frac{9}{ab}+10$$

$ab>0$，$\dfrac{9}{ab}>0$ であるから，

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{9}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{9}{ab}}=2\cdot 3=6$$

よって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)=ab+\dfrac{9}{ab}+10 \geqq 6+10=16$

したがって，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$ の最小値は　16

8 〈極限 1〉

問題　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-x^2)$ を求めよ。

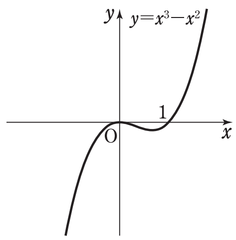
【誤答】

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ より

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-x^2)=0$$

不定形の問題である。正しい解法は不定形を解消してから求めることになる。直感的には誤答でありそうだが，そう簡単にはいかないのが極限である。単に解けるだけではなく，なぜ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-x^2)=0$ ではいけないのか説明できるようになりたい。

下図の $y=x^3-x^2$ のグラフを見れば明らかである。



【正しい解答】

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-x^2)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)=\infty$$

9 〈極限 2〉

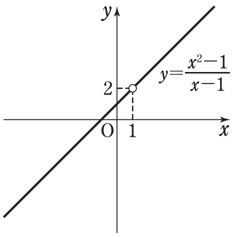
問題　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ を求めよ。

【誤答】

$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=1$$

こちらも不定形の問題である。これもグラフから明らかであろう。



同類の問題に，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2}=1$ や $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=1$ としてしまう誤答がある。正しくは，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$ である。

【正しい解答】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}(x+1)\\&=2\end{aligned}$$

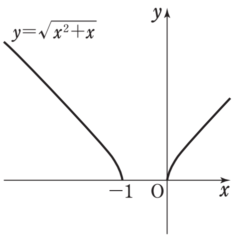
⑩ **〈極限 3〉**

問題　$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}$ を求めよ。

【誤答】

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}=0$$

$x\to-\infty$ になっているときには注意しなければならないという問題である。



【正しい解答】

$x<0$ のとき，$\sqrt{x^2}=-x$ より

$\sqrt{x^2+x}=-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}&=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\\&=\infty\end{aligned}$$

【別解】

$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき　$t\to\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}&=\lim_{t\to\infty}\sqrt{t^2-t}\\&=\lim_{t\to\infty}\sqrt{t^2\left(1-\frac{1}{t}\right)}\\&=\infty\end{aligned}$$

§3. まとめ

当初，誤答を作成すればいいだけなので簡単だろうと始めたこの取り組みであるが，いざやってみると意外にも難しいことに気づかされた。それは，ケアレスミスや計算ミスなどの単純な誤りや間違いをつくるだけでは意味がないということである。それだとただのミスの訂正で終わってしまうので，本質的な理解にはならない。生徒が本質的な理解をするために，**【誤答】**はその問題の核心をついたものでないといけない。私自身が，この取り組みを通して，**【誤答】**の作成が教材研究になり，生徒理解につながることがわかった。この実践は，必ずや生徒の知的好奇心を高め，本質的な理解が深まるはずだと確信しているので，本投稿を読まれ共感された方はぜひ活用していただきたい。

《参考文献》

〔1〕 数学Ⅰ　数研出版
〔2〕 数学Ⅱ　数研出版
〔3〕 数学Ⅲ　数研出版
〔4〕 数学A　数研出版
〔5〕 学び Times　高校数学の美しい物語
—全ての三角形が二等辺三角形であることの証明⁉—
https://manabitimes.jp/math/1056

（滋賀県立守山高等学校）