魔方陣で遊ぼう！

伊禮（いれい）　三之（みつゆき）

§1．はじめに

「数学Ａ」の「数学と人間の活動」の目標には，「数学と人間の活動について，数学的活動を通して，それらを数理的に考察することの有用性を認識する」とともに，「数量や図形に関する概念などと人間の活動との関わりについて理解」し，「関心に基づいて発展させ考察する」ことや，「数理的なゲームやパズルなどを通して，数学と文化との関わりについての理解を深め」，それらに「数学的な要素を見いだし，目的に応じて数学を活用して考察する」ことが記されている。こうしたことを実現するためには，教科書の演繹的な記述をそのままなぞるだけではなく，帰納的な授業展開に構成し直すことが必要だろう。

以下に，沖縄県立普天間高等学校の１年生35名を対象に行った２時間の「魔方陣で遊ぼう！」の授業を紹介しよう。使用教科書は，「高等学校数学Ａ」(数研出版)である。

§2．魔方陣の導入－「メランコリア」で

ドイツの画家であり，数学者でもあったアルブレヒト・デューラー(1471～1528)の有名な木版画に，「メランコリア」(憂鬱)という作品がある。これをスライドで提示しながら，その右上半部に，4×4の方陣が見え，１から16までの数字が左図のように配置されていることを紹介した。そして，この方陣には驚くような数の魔法がひそんでいる，として質問１に取り組んでもらった。

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

【質問１】　デューラーの方陣の数の，各行・各列に並ぶ４つの数をくわえて下さい。

各行，各列の４つの数の和は，次のようになる。

各行　$16+3+2+13=34$，$5+10+11+8=34$，
$9+6+7+12=34$，$4+15+14+1=34$

各列　$16+5+9+4=34$，$3+10+6+15=34$，
$2+11+7+14=34$，$13+8+12+1=34$

すべて34になった。それだけではなく，対角線上にある４つの数の和も34であることを確認した。

正対角線　$4+6+11+13=34$

負対角線　$16+10+7+1=34$

このように，１から始まる自然数をn行n列の方陣に並べて，横の行，縦の列および対角線上の数の和がすべて等しくなるように配置したものを，**n次の魔方陣**(***n*-th degree magic square**)と呼んでいると説明した。デューラーの「メランコリア」には，４次の魔方陣が彫られていて，おもしろいことに，第４行の中央の２数をつなげた1514は，この木版画の制作年を表していることも紹介した。

§3．３次の魔方陣に挑戦

続いて，質問２に進む。その際に，１から９までのカードを配布した。

【質問２】　１から９までの自然数をうまく配置して，３次の魔方陣を作って下さい。

まず，各行・各列・各対角線の和を確認する。すべての数を配置したとすると方陣全体の和は，次のように計算するとよい（１年生のため自然数の和は未習）。

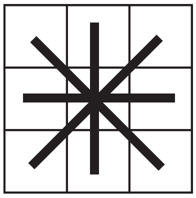
$$\begin{array}{rl} & S=\ 1+\ 2+\ 3+\cdots+\ 7+\ 8+\ 9 \\ +) & \underline{S=\ 9+\ 8+\ 7+\cdots+\ 3+\ 2+\ 1} \\ & 2S=10+10+10+\cdots+10+10+10=10\times 9 \end{array}$$

$$\therefore\quad S=10\times 9\div 2=45$$

各列（各行）の和は等しくなるので，上で求めた45を３等分して，$45\div 3=15$ となる。

しばらく時間をとると，「できた！」という声が何名からか上がってきたが，まだ多くの生徒はできず

にいた。そこで，最初のヒントを与える。中央のマスの数は５である。なぜなら，方陣のすべてのマスを覆うよう図のようにくわえると，３数の各和はす



べて 15 なので，これらを合わせると，15×4＝60 となる。ところが，１から９までの総和は 45 であった。このくい違いは中央のマスを４回数えているところから起こっている。つまり，中央のマスは３回余分にくわえているので，

60－45＝15，15÷3＝5

となり，中央のマスは５と確定する。このヒントで，多くの生徒が魔方陣をつくることができた。

まだ完成していない生徒のため，１の場所に関する第２のヒントを与えた。１の配置は本質的に下の２通りの場合しかない。他は回転や裏返しによって同じになるからである。この２つを検討する。

①

1		
	5	

②

	1	
	5	

①の場合は，１の中心との対称のマスは９に決まる。すると，３行目と３列目の２組は，９を除いて，15－9＝6 となる。ところが，この６の２数への加法的分解は，

6＝4＋2（１と５はすでに使用済み）

しかない。したがって，１の①のような配置は不可能となる。すると，１の配置は②の場所に決まる。ここで少し時間をとると，あとは，順次うめていけばよいので，全員が３次の魔方陣を完成することができた。

	1	
	5	
4	9	2

→

8	1	6
3	5	7
4	9	2

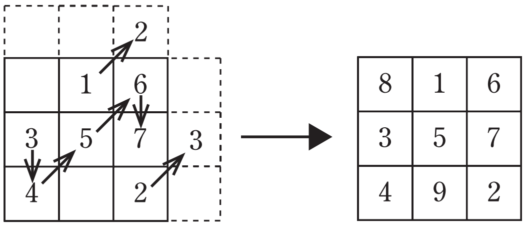
このように，試行錯誤の後を振り返って，論理的に考えていくことが大切であることを強調した。

§4. 奇数方陣のおもしろい作り方

３次の魔方陣は，回転や裏返しを除けば，本質的に１種類しかないが，４次は 880 種類，５次の魔方陣に至っては 68826306 種類もある。奇数方陣の作り方については，いくつかおもしろい方法が知られている。第１時の最後は，その中で**ド・ラ・ルベール**と**バシェーの方法**を紹介し，その練習問題を行った。

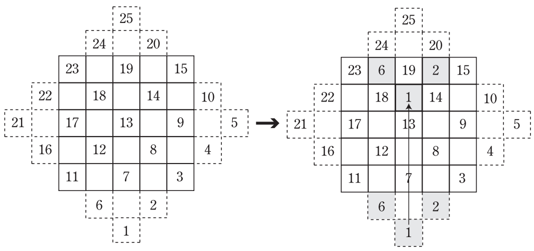
【ド・ラ・ルベールの方法】

3×3 の方陣の上と右側に破線の張り出しを作っておく（図左破線）。そして，中央の列の最上段に１を置く。それから，１の右斜めに２を置く（右斜めに次の数を置くことが基本）。張り出しのマスに入ったら，最下段に移動する。３を２の右斜めの張り出しに入れ，それを一番左に移動する。次に４を入れようとすると，すでに１が入っているので，このときはすぐ下に配置する。４からまた右斜めに進んでいく。６の次の７は右上に張り出しがないので，この場合も真下に配置する。この作業を進めていくと完成する。



【バシェーの方法】

５次の魔方陣を例にしよう。まず，下図左のように方陣から左右上下に張り出しのテラスをつけておく。テラスの一番下からスタートして対角線状に 1, 2, …, 5 と配置し，次の対角線の下にもどって，6, 7, … と配置する。以下同様に 25 まで配置していく。



次に，はみ出した部分を，下方の数は上方のマスへ，上方は下方，右方は左方，左方は右方へと移動していけば完成する（前図右）。なおこの方法は，上下左右のテラスにちなんで，**「テラス法」**とも呼ばれている。

§5. 4次の魔方陣

第2時は，4次の魔方陣に挑戦した。

【質問3】 1から16までの自然数をうまく配置して，4次の魔方陣を作って下さい。

各行，各列，各対角線の和を求めると，

$$(1+2+3+\cdots+16)\div 4=136\div 4=34$$

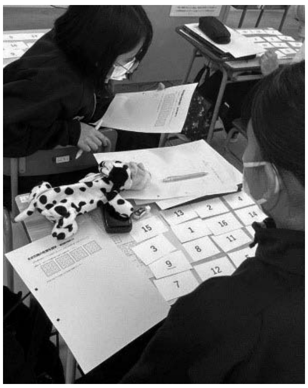
である。カードを配布して，しばらく試行錯誤でやってもらうが，まったくできない。話題をかえて，公務員試験にも4次の魔方陣が出題されることがよくあることを紹介し，次の問題にも取り組んでもらった。これも簡単ではない。

【質問4】 下図は，1～16のそれぞれ異なる整数を，縦，横，対角線の和がいずれも等しくなるようにマス目に入れた一部を示したものである。A，Bにそれぞれあてはまる整数の和として正しいのはどれか。（東京都Ⅰ類2007）

1　17
2　18
3　19
4　20
5　21

4		15	
A			8
	7		
	2	3	B

4次の魔方陣は，試行錯誤ではほとんど手に負えないので，なんらかの性質（法則）がないかを調べてみる。



【質問5】を提起して，ペアワークあるいは4人のグループワークの時間をとって，4つの魔方陣に共通する性質はないか，その探索に入った。

【質問5】 次の4つの魔方陣に共通する性質を探して下さい。

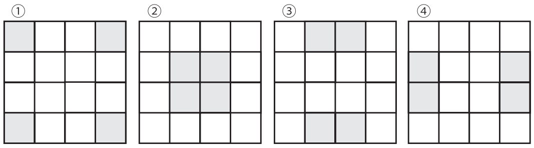
16	5	9	4
7	2	14	11
10	15	3	6
1	12	8	13

4	5	11	14
16	9	7	2
13	12	6	3
1	8	10	15

16	4	5	9
15	3	10	6
1	13	8	12
2	14	11	7

16	4	9	5
14	2	11	7
1	15	6	12
3	13	8	10

探索の後，発言を促すと，次の4つの性質をあげてくれた。



① 四隅にある4つの数の和は34である。

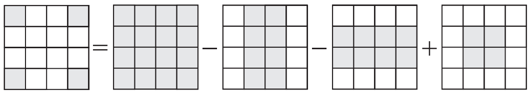
② 中央の正方形内にある4つの数の和は34である。

③ 第1行目の中の2数と第4行目の中の2数の和は34である。

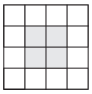
④ 第1列目の中の2数と第4列目の中の2数の和は34である。

この発見はまだ仮説の段階であり，数学では証明を与えてはじめて法則となる，ということで①②の証明を紹介した。

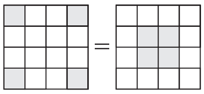
【証明】（①②を同時に示す。）



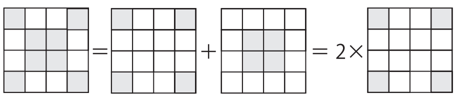
$=34\times 4-34\times 2-34\times 2+$



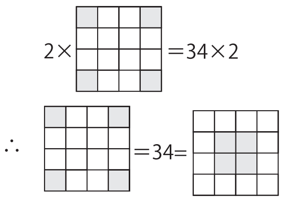
∴



また



これより,



③④についても同様にできるので，練習問題とした。あわせて，東京都の問題にも再度チャレンジしてもらった。

第２時の最後に，自然方陣（下図左）による４次の魔方陣の作り方とその性質を紹介した。

① 1〜16 を右から順に配置する。

② 対角線の和は 34 なのでそのままにする。

③ それ以外の数は，方陣の中心に関して対称な位置に入れ替える。

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

→

13	8	12	1
3	10	6	15
2	11	7	14
16	5	9	4

この魔方陣には，一般的な性質にくわえて次のような性質があり，特に**【性質１・２】**を知っていると公務員試験の問題はさらに簡単に解ける。実は，公務員試験で扱われる４次の魔方陣は，自然方陣で作られ，**【性質３】**で変換されたものがほとんどである。

【性質１】中心から対称な位置にある２数の和は 17 である。

【性質２】四隅の小正方形内の４つの数の和はすべて 34 である。

【性質３】中心線から対称の位置にある行や列を入れ替えても，また魔方陣となる。

§6. 生徒たちの授業評価とその感想

授業終了後に，「楽しさ」と「理解度」に関するアンケートを実施し，結果は次の通りであった。

$\boxed{\text{楽しさは？}}$（未記入２名）

A　とても楽しかった（16 名/48.5％）

B　楽しかった（17 名/51.5％）

C　何も感じなかった（0 名/0.0％）

D　楽しくなかった（0 名/0.0％）

E　全く楽しくなかった（0 名/0.0％）

$\boxed{\text{理解度は？}}$（未記入１名）

A　よくわかった（14 名/41.2％）

B　わかった（19 名/55.9％）

C　どうとも言えない（1 名/2.9％）

D　あまりわからなかった（0 名/0.0％）

E　全くわからなかった（0 名/0.0％）

「楽しさ」については，肯定的なＡとＢを合わせた評価は 100％,「理解度」は，Ａ，Ｂ合わせて 97.1％であった。授業の感想でも高い評価の様相が多く記されていた。生徒の感想を２つ紹介し，授業を参観した教師の講評を記して結びとする。

「数学の授業と聞いて，難しい授業なのかなと思っていましたが，段階的にどんどんと法則が読み解かれていき，“なんで？”“そうなるのか！”といった疑問や疑問の解決が多く感じられました。後半の難しい問題も自分で４次の魔方陣を作るのも，難しいとは思いましたが，めんどうなどとは思わず，どうやったら作れるかとても集中して取り組むことができました。実際に自分の手で作ってみるというのも良いと思いました。」

「無造作に数を並べているだけのように見える魔方陣でも，そこには何らかの法則性があって，それが楽しかったです。特に，４次の魔方陣の時，真ん中４つの数を足すと 34 になることに気づいた時は，自分で法則にたどりつけた喜びとワクワク感を体験することができました。私はどちらかといえば数学が苦手な方なのですが，少しのひらめきでこれが解けるようになっていることに感動しました。２時間の授業とてもあっという間で楽しかったです。」

「伊禮先生は，生徒たちに“魔方陣で遊んでみよう”とおっしゃっていましたが，内容的にはとても数学的な深い学びになっていたと思います。生徒たちが試行錯誤した後の定理の紹介や証明の説明は，生徒たちにとってもその定理の有用性を十分実感することができるものになっていて，普段の授業ではなかなか達成することのできない部分なのですばらしいなと思いました。」

《参考文献》

〔１〕 大森清美『新編　魔方陣』冨山房，1992

（仁愛大学　人間生活学部　子ども教育学科　教授）