入試問題で批判的思考力を養う
～一橋大学の 2019 年度入試問題を題材に～

中島(なかしま)　熙人(ひろと)

§1. はじめに

近年，様々な大学や企業が「ディプロマ・ポリシー」や「学生に求めるスキル」として掲げる項目の中に，「問題発見・解決能力」という文字が出てくるのをよく目にする。このうち，問題発見能力については，日ごろ当然とみなしているものの中に課題を見出す「批判的思考力」が不可欠である。

本稿では，こうした背景を意識して，大学入試問題を題材に高校 3 年生のクラスで実施した授業について紹介する。

§2. 問題と 2 つの解答例

題材にした問題は，一橋大学の 2019 年度入試問題の第 2 問である。

> 原点をＯとする座標平面上の点Ｑは円 $x^2+y^2=1$ 上の $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ の部分を動く。
> 点Ｑと点 $\mathrm{A}(2,\ 2)$ に対して，
> $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
> を満たす点Ｐの軌跡を求め，図示せよ。

授業では，単にこの問題を解かせるのではなく，この問題に対する次のような 2 つの解答例を示した。そして，2 つの解答例はどちらかが正しく，もう一方は誤りであることをあらかじめ伝え，どちらの解答例のどの部分が誤りであり，正しい解答にするにはその部分以降をどのように修正すればよいかも考えてくるように，という課題を課した。

【解答例 1】

点Ｑは円 $x^2+y^2=1$ 上の $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の部分を動くから，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおける。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\cos\theta+2\sin\theta$

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=2(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)\\&=(2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta)\\&=(\cos 2\theta+\sin 2\theta+1,\ -\cos 2\theta+\sin 2\theta+1)\qquad\cdots\cdots(*)\\&=\left(\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1,\ \sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\end{aligned}$$

よって $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1\\ y=\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1\end{cases}$　$\cdots\cdots(\#)$

これより，

$$\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{x-1}{\sqrt{2}},\quad \sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{y-1}{\sqrt{2}}$$

$\cos^2\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ であるから

$$\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$$

よって　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

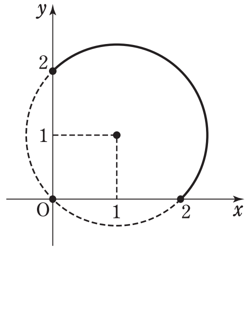
$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$　$\cdots\cdots(**)$

$(\#)$より　$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$，

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

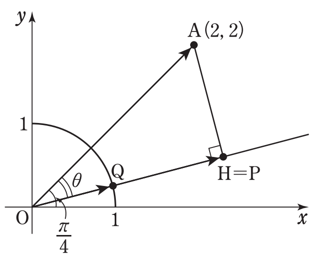
よって　$0\leqq x\leqq\sqrt{2}+1$，　$0\leqq y\leqq\sqrt{2}+1$

ゆえに，点Ｐの軌跡は円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ の $0\leqq x\leqq\sqrt{2}+1$，$0\leqq y\leqq\sqrt{2}+1$ の部分であり，図は下の太線部分(ただし，端点と原点を含む)。



【解答例 2】

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ とおくと，点Qは円 $x^2+y^2=1$ 上の $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ の部分を動くから　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$



[1]　$\theta=0$ のとき

$|\overrightarrow{OQ}|=1$ より　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OA}|$

よって

$\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ})\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}$

ゆえに，点Pは点Aと一致する。

[2]　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき

点Oを端点とする半直線OQに点A(2, 2)から下ろした垂線の足をHとすると，$|\overrightarrow{OQ}|=1$ より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta=|\overrightarrow{OA}|\cos\theta=|\overrightarrow{OH}|$

よって

$\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ})\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OH}|\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OH}$

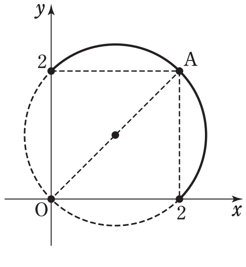
ゆえに，点Pは点Hと一致する。

このとき，$OP\perp AP$ であるから　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

よって　$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=0$

これは，2点O，Aを直径の両端とする円を表す。

[1]，[2]より，点Pの軌跡は2点O，Aを直径の両端とする円の $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ の部分であり，図は下の太線部分(ただし，端点を含み，原点は含まない)。



§3. 課題の解説

生徒にとってみれば，一見すると，どちらの解答例も間違ったことを述べているようには見えないかも知れない。しかし，最終的な点Pの軌跡には，原点を含むかどうかの相違がある。従って，少なくともどちらかの解答は誤っているはずであり，それを発見して指摘し，修正するのがこの課題の本題である。

結論から述べると，誤りがあるのは解答例1である。(#)において $(x,\ y)=(0,\ 0)$ とすると，$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ となるが，これは解答例1の冒頭で定めた $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たさない。そのため，原点は点Pの軌跡に含まれない。

それでは，解答例1のどの部分を修正すれば，原点が除外された正しい解答を導き出すことができるだろうか。この解答例の根本的な誤りは，(＊＊)から次の行にかけて点Pの座標 $(x,\ y)$ の式から媒介変数 θ を消去するときに，同値性が失われてしまっている点にある。これに対して，課題を出した際にはあらかじめ次のような2通りの修正案を用意した。

【修正案 1】

円の方程式 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を導出する部分は解答例1と同様である。その後，(＊＊)以降で次のように場合分けを行う。

[1]　$\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$ のとき

$\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1<1$ すなわち $x<1$ である。

このとき

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)<1$$

$$1\leqq\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}$$

よって　$2\leqq y<\sqrt{2}+1$

[2]　$\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\geqq 0$ のとき

$\sqrt{2}\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1\geqq 1$ すなわち $x\geqq 1$ である。

このとき

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

$$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

よって　$0\leqq y<\sqrt{2}+1$

[1]，[2]より，点Pの軌跡は円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ の

$$\begin{cases}x<1\\2\leqq y<\sqrt{2}+1\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}x\geqq 1\\0\leqq y\leqq\sqrt{2}+1\end{cases}$$

の部分である(図は解答例2と同様)。

【修正案 2】

こちらも，円の方程式 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を導出する部分は解答例 1 と同様である。

x，y の変域については，(＊)より

$$x=\cos 2\theta+\sin 2\theta+1 \quad \cdots\cdots①$$

$$y=-\cos 2\theta+\sin 2\theta+1 \quad \cdots\cdots②$$

①＋② より

$$x+y=2\sin 2\theta+2$$

よって，$\sin 2\theta=\dfrac{x+y}{2}-1 \quad \cdots\cdots③$

①－② より

$$x-y=2\cos 2\theta$$

よって，$\cos 2\theta=\dfrac{x-y}{2} \quad \cdots\cdots④$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$0\leqq 2\theta\leqq\pi$

よって　$0\leqq\sin 2\theta\leqq 1$，$-1\leqq\cos 2\theta\leqq 1$

③，④より　$0\leqq\dfrac{x+y}{2}-1\leqq 1$，$-1\leqq\dfrac{x-y}{2}\leqq 1$

よって，$-x+2\leqq y\leqq -x+4$，$x-2\leqq y\leqq x+2$

したがって，点Pの軌跡は円

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ の $-x+2\leqq y\leqq -x+4$，$x-2\leqq y\leqq x+2$ の部分である(図は解答例 2 と同様)。

修正案 1 は，解答例 1 の(＊＊)のところで場合分けを行い，同値性が失われている部分をピンポイントで修正している。このような場合分けは，三角関数を用いた変数変換の変域を論じる際に，しばしば重要となる考え方である。

一方，修正案 2 は，x と θ，y と θ の関係式をそれぞれ個別に導くのではなく，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ の変域から x と y の条件式を導出している。この方法であれば，場合分けを行うことなく，x と y の満たす条件を正しく導出することができる。修正案 1 と比べると思いつきにくいかも知れないが，簡潔に媒介変数を消去しているという点では非常に巧みな方法である。

課題を課した際には，大多数の生徒が誤りがあるのは解答例 1 であることまでは見抜くことができたものの，適切な修正を示すことができた者はわずかであった。そのような生徒の解答は，基本的に修正案 1，2 のいずれかと同じ内容であった。そのため，課題の締め切り後の授業では，それぞれの修正案に対して 1 名ずつ代表を選び，皆の前で発表してもらう形で 2 つの修正案の内容をクラス全体に共有した。その後，それぞれの修正案が解答例 1 の誤りをどのように正すことができているかについて，補足を加えた。

また，解答例 2 の，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の正射影の長さと捉える考え方についても触れた。これは，内積のもつ図形的な意味について考えた経験がないと手が進みづらい解法かも知れない。しかし，このように別解を考えることで全く別の視点から問題を捉えることができる場合もあり，問題集の解答に別解が記されているときには，ないがしろにしないようにも言い添えた。

§4. おわりに

この授業を実施しようと思ったのは，ひとつ前の年度の高 3 の生徒から，この入試問題について質問を受けたのがきっかけである。その生徒はこの問題が収録された問題集の解答を持っており，そこに記されている模範解答に誤りがあるのではないかと尋ねてきた。それを見ると，解答の本文は本稿の解答例 1 と同様であるのに対し，図示は解答例 2 の正しいものが掲載されており，「この解答だと，原点も含まれるはずではないか」というのがその生徒の疑問であった。

当時は，その質問に対してその場で答えることができず，数学科の他の教諭の協力も得つつ検証した結果，その模範解答の誤りをはっきりさせることができた。それと同時に，この誤りはうっかりすると誰でも陥りかねないものであると感じ，今回のようにあえて誤った解答例として示して，注意を促す仕方で扱うことにした。

今回の授業で使用したプリントの感想欄には，「どちらかの解答例に誤りがあるとわかっていても，それを見つけるのは難しかった」「日ごろ読んでいる問題集の解答や，自分が書いた解答も，本当に正しいか疑ってみるのは大切だと感じた」という声が多く記されていた。今回の授業は通常の入試問題演習とは異なる形式ではあったが，このように物事を批判的に捉えて検証することの大切さを生徒に実感させることができ，貴重な機会となったと感じている。

《参考資料》

〔1〕『2019 数学Ⅰ・Ⅱ・A・B入試問題集(文理系)』数研出版