放物線上の 4 点が同一円周上にある条件について

大谷（おおたに） 茂（しげる）

§1. はじめに

雑誌〔1〕に次の入試問題の記事が載っていた。

> **問題 1** (2022 立命館大学・改題)
> 円 $x^2+y^2=1$ 上に異なる 4 点 A(1, 0), B($\cos\theta$, $\sin\theta$), C($\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$), D($\cos\varphi$, $\sin\varphi$) がある。この 4 点を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ が存在するとき $\varphi=-3\theta$ を示せ。

この問題について教育的な考察ができたので紹介したい。

§2. 複素数

〔1〕には複素数による鮮やかな解答が上げてあった。生徒には**問題 2** の形で与えた。

> **問題 2**
> 複素数 $z=x+yi$ (x, y は実数) が $|z|=1$, $y=ax^2+bx+c$ をみたしている。
> (1) x, y を z の分数式で表せ。
> (2) z はある (複素数係数の) 4 次方程式をみたすことを示せ。
> (3) $\alpha_\theta=\cos\theta+i\sin\theta$ とする。(2)の方程式が異なる 4 数 1, α_θ, $\alpha_{2\theta}$, α_φ を解にもつとき $\varphi=-3\theta$ を示せ。

略解

(1) $x=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $y=\dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$

(3) 解と係数の関係より

$1\cdot\alpha_\theta\cdot\alpha_{2\theta}\cdot\alpha_\varphi=1$

$\therefore\quad \theta+2\theta+\varphi=0$

§3. 法線ベクトル

問題 1 を眺めていると直線の法線ベクトルがみえてきた。生徒には逆問題の形で与えた。

> **問題 3**
> 円 $x^2+y^2=1$ 上に異なる 4 点 A(1, 0), B($\cos\theta$, $\sin\theta$), C($\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$), D($\cos 3\theta$, $-\sin 3\theta$) がある。
> (1) 直線 AC, BD の法線ベクトルを求めよ。
> (2) 2 直線 AC, BD を表す 2 次方程式を求めよ。
> (3) 4 点をとおり, y 軸に平行な軸をもつ放物線が存在することを示せ。

略解

(1) $\left(\cos\dfrac{0+2\theta}{2},\ \sin\dfrac{0+2\theta}{2}\right)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$

$\left(\cos\dfrac{\theta+(-3\theta)}{2},\ \sin\dfrac{\theta+(-3\theta)}{2}\right)=(\cos\theta,\ -\sin\theta)$

(2) $(x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta)$

$\times(x\cos\theta-y\sin\theta-\cos 2\theta)=0$ ……①

(3) ①の左辺を $f(x,\ y)$ とおくと方程式 $f(x,\ y)+\sin^2\theta(x^2+y^2-1)=0$ は $x^2+(x,\ y$ の 1 次式$)=0$ となるので y 軸に平行な軸をもつ放物線または y 軸に平行な 2 直線を表す。さらに A, B, C, D を解にもつので題意の放物線を表す。

§4. 一般化

結局, 次の定理が成り立つことがわかる。

> **定理**
> 放物線 $P: y=x^2$ 上の異なる 4 点 A, B, C, D について(I)(II)は同値である。
> (I) A, B, C, D を通る円 K が存在する。
> (II) (直線 AB の傾き)$=-$(CD の傾き)

(Ⅱ)⇒(Ⅰ)の証明

2直線を $y=mx+a$，$y=-mx+b$ とおく。

このとき，方程式

$(y-mx-a)(y+mx-b)+(m^2+1)(x^2-y)=0$

はA，B，C，Dを解にもち，かつ

$x^2+y^2+(x,\ y$ の1次式$)=0$

と変形できるので題意のKを表す。

(Ⅰ)⇒(Ⅱ)の証明

3点A，B，Cを通る円はKに限る。またKとPの共有点は(yを消去するとxの4次方程式となるので)A，B，C，Dの4点に限る。

今，P上に点Eを (ABの傾き)$=-$(CEの傾き) となるようにとると(Ⅱ)⇒(Ⅰ)よりA，B，C，Eを通る円が存在する。これはKゆえEはKとPの共有点。よって D$=$E

§5. 方べきの定理

定理は方べきの定理を使っても証明できる。

方べきの定理による(Ⅰ)⇔(Ⅱ)の証明

AB，CDの傾きをm，nとする。

(i) $m=n$ のとき

(Ⅰ)⇔4点を頂点にもつ四角形が等脚台形

⇔ $m=n=0$ ⇔(Ⅱ)

(ii) $m\neq n$ のとき

2直線AB，CDの交点Q$(p,\ q)$とする。

直線ABは $y=m(x-p)+q$ と表せる。

A$(a,\ \cdot)$，B$(b,\ \cdot)$とするとa，bは2次方程式 $x^2=m(x-p)+q$ の2解ゆえ解と係数の関係より

$a+b=m$，$ab=mp-q$

このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{BQ}&=\sqrt{m^2+1}\,|a-p|\cdot\sqrt{m^2+1}\,|b-p|\\&=(m^2+1)|(a-p)(b-p)|\\&=(m^2+1)|mp-q-p\cdot m+p^2|\\&=(m^2+1)|p^2-q|\end{aligned}$$

同様にC$(c,\ \cdot)$，D$(d,\ \cdot)$とすると

$\mathrm{CQ}\cdot\mathrm{DQ}=(n^2+1)|p^2-q|$

$\therefore\ \dfrac{\mathrm{CQ}\cdot\mathrm{DQ}}{\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{BQ}}=\dfrac{n^2+1}{m^2+1}$ 方べきの定理より

(Ⅰ)⇔ $\dfrac{n^2+1}{m^2+1}=1$ ⇔ $m=-n$ ⇔(Ⅱ)

§6. おわりに

同大学では，過去に次の問題も出題されている。

> **問題4** (2011 立命館大学)
>
> 2曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-a$，$x=\dfrac{1}{2}y^2-a$ が異なる4つの共有点をもっている。
>
> (1) 4点を通る円の中心と半径を求めよ。
>
> (2) 4点を頂点とする四角形の対角線の方程式を求めよ。

問題1のルーツは**問題4**のような気がしてくる。過去問を研究することは大切だと思った。

《参考文献》

〔1〕 安田　亨「八艘飛び講座　愛は突然に！」
(東京出版「大学への数学」2022.6)

(愛知県立明和高等学校)