$x^3-3abx+a^3+b^3$
$=(x+a+b)\{x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2\}$
について　～その証明と応用～

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

等式 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ は教科書では公式としての扱いはないが，知っておく必要のある公式であろう。

たとえば，①条件つき不等式「$a+b+c=0$ のとき，$a^3+b^3+c^3=3abc$」の証明や②「3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α，β，γ とするとき，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ の値を求める」ときなどは，この等式を知っておく方が手早くできる。

実際，①では $a+b+c=0$ のとき

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=0\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

であるから，$a^3+b^3+c^3=3abc$ となり，②では

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$ より

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$$

ここで，3次方程式の解と係数の関係を使えば，

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

であるから

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$$
$$=-\frac{b}{a}\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-3\frac{c}{a}\right\}+3\left(-\frac{d}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}-\frac{3d}{a}$$

である。

また，$a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき $a+b+c>0$ であるから

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$$

（等号は $a=b=c$ のとき）

このことから $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqq abc$，すなわち

$$\frac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$$ （等号は $a=b=c$ のとき）

という「3数のときの相加・相乗平均の不等式」が導かれる。このような意味においても等式

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

は有用な等式である。その証明にもいろいろあろうが，本稿では「因数定理」「組立除法」「3次方程式の解と係数の関係」を使って証明し，さらに特殊な場合の3次方程式の解の公式を考察する。

§2. 因数定理と組立除法を使う問題として

生徒に，次のような**問題1**として提示し，解かせてみる。

> **問題1**　$P(x)=x^3-3abx+a^3+b^3$ とする。
> 次の問いに答えよ。
> (1)　$P(x)$ は $x+a+b$ で割り切れることを証明せよ。
> (2)　$P(x)$ を因数分解せよ。
> (3)　$a^3+b^3+c^3-3abc$
> $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
> であることを証明せよ。

(1)の証明　**因数定理の利用**

$$P(-a-b)=\{-(a+b)\}^3-3ab\{-(a+b)\}+a^3+b^3$$
$$=-(a+b)^3+3ab(a+b)+a^3+b^3$$
$$=-(a+b)^3+(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$$
$$=-(a+b)^3+(a+b)^3=0$$

因数定理により $P(x)$ は

$x-(-a-b)=x+a+b$ で割り切れる。終

(2) **組立除法の利用**

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-a-b & 1 & & -3ab & a^3+b^3 \\
 & & -a-b & a^2+2ab+b^2 & -a^3-b^3 \\
\hline
 & 1 & -a-b & a^2-ab+b^2 & 0
\end{array}
$$

$(\because (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3)$

上の組立除法から

$P(x)=(x+a+b)\{x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2\}$

(3)の証明　**(2)の結果利用**

(2)より　$P(x)=x^3-3abx+a^3+b^3$

$=(x+a+b)\{x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2\}$

であるから

$P(c)=c^3-3abc+a^3+b^3=a^3+b^3+c^3-3abc$

$P(c)=(c+a+b)(c^2-ca-bc+a^2-ab+b^2)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

したがって

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$　終

§3. 3次方程式の解と係数の関係を使う問題として

これも生徒に，次のような問題2として提示し，解かせてみる。

> **問題2**　$P(x)=x^3-3abx+a^3+b^3$ とする。
> また，$P(x)=0$ の3つの解を α, β, γ とする。このとき，次の問いに答えよ。
> (1)　$A=\alpha+\beta$, $B=\alpha\beta$ とするとき，A, B, γ を a, b で表せ。
> (2)　$P(x)$ を因数分解せよ。
> (3)　$a^3+b^3+c^3-3abc$
> $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
> であることを証明せよ。

(1)　**3次方程式の解と係数の関係の利用**

3次方程式の解と係数の関係により

$\alpha+\beta+\gamma=0$　……①

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3ab$　……②

$\alpha\beta\gamma=-a^3-b^3$　……③

①より　$\gamma=-\alpha-\beta$　……①′

②より　$\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma=-3ab$　……②′

②′に①′を代入して

$\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2=-3ab$　……④

③に①′を代入して　$-\alpha\beta(\alpha+\beta)=-a^3-b^3$

つまり　$\alpha\beta(\alpha+\beta)=a^3+b^3$　……⑤

④と⑤と $A=\alpha+\beta$, $B=\alpha\beta$ より

$B-A^2=-3ab$　……④′

$AB=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　……⑤′

⑤′から $A=a+b$, $B=a^2-ab+b^2$ とすると $B-A^2=a^2-ab+b^2-(a+b)^2=-3ab$ となり④′を満たす。よって，$A=a+b$, $B=a^2-ab+b^2$ であり，①′より　$\gamma=-a-b$

$\boldsymbol{A=a+b,\ B=a^2-ab+b^2,\ \gamma=-a-b}$

……(答)

(2)　$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}(x-\gamma)$ である。

(1)より　$\alpha+\beta=A=a+b$, $\alpha\beta=B=a^2-ab+b^2$, $\gamma=-a-b$ であるから

$P(x)=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}(x-\gamma)$

$=\{x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2\}\{x-(-a-b)\}$

$=(x+a+b)\{x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2\}$

(3)　§2. の(3)に同じ

§4. 3次方程式 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$ の解 ～1の虚数立方根 ω の利用～

これも問題3として生徒に考えさせる。

> **問題3**　a, b は実数，ω を1の虚数立方根とする。
> (1)　x の3次方程式 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$ の解は $x=-a-b$, $a+(a-b)\omega$, $b+(b-a)\omega$ であることを証明せよ。
> (2)　x の3次方程式 $x^3-6x+9=0$ を解け。
> (3)　x の3次方程式 $x^3-3\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1=0$ を解け。

(1)　**問題1(2)の(2)の結果利用**

$x^3-3abx+a^3+b^3$

$=(x+a+b)\{x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2\}$

であるから3次方程式 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$ の解は1次方程式 $x+a+b=0$ の解 または 2次方程式 $x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2=0$ の解である。

$x+a+b=0$ より　$x=-a-b$

$x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2=0$ より

$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4(a^2-ab+b^2)}}{2}$$

$$=\frac{a+b\pm\sqrt{-3(a-b)^2}}{2}=\frac{a+b\pm(a-b)\sqrt{3}i}{2}$$

$$=\frac{a(1\pm\sqrt{3}i)}{2}+\frac{b(1\mp\sqrt{3}i)}{2}\ (\text{複号同順})$$

$$=a\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}+b\frac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2}$$ （複号同順）

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$

$=(1+\omega,\ 1+\omega^2),\ (1+\omega^2,\ 1+\omega)$ （$\because \omega^2+\omega+1=0$）

$=(1+\omega,\ -\omega),\ (-\omega,\ 1+\omega)$ （複号同順）

であるから，

$$x=a(1+\omega)+b(-\omega),\ a(-\omega)+b(1+\omega)$$
$$=a+(a-b)\omega,\ b+(b-a)\omega$$

よって，3 次方程式 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$ の解は $x=-a-b,\ a+(a-b)\omega,\ b+(b-a)\omega$ である。終

(2)　$x^3-6x+9=x^3-3\cdot 2\cdot 1x+2^3+1^3$ であるから，$a=2,\ b=1$ の場合である。

よって，$x^3-6x+9=0$ の解は

$$x=-2-1,\ 2+(2-1)\omega,\ 1+(1-2)\omega$$
$$=\mathbf{-3,\ 2+\boldsymbol{\omega},\ 1-\boldsymbol{\omega}} \quad \cdots\cdots（答）$$

(3)　$x^3-3\sqrt{2}\,x+2\sqrt{2}+1$

$=x^3-3\cdot\sqrt{2}\cdot 1\cdot x+(\sqrt{2})^3+1^3$

であるから，$a=\sqrt{2}$，$b=1$ の場合である。

よって，$x^3-3\sqrt{2}\,x+2\sqrt{2}+1=0$ の解は

$$\boldsymbol{x=-\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)\omega,}$$
$$\boldsymbol{1+(1-\sqrt{2})\omega} \quad \cdots\cdots（答）$$

なお，(2)については $P(x)=x^3-6x+9$ とおくと

$$P(-3)=(-3)^3-6(-3)+9=-27+18+9=0$$

であるから，$P(x)$ は $x+3$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 0 & -6 & 9 \\ & & -3 & 9 & -9 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

この組立除法から $P(x)=(x+3)(x^2-3x+3)$

$P(x)=0$ より $x+3=0$ または $x^2-3x+3=0$

よって　$x=-3$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$ でもよい。

蛇足であるが，

$$\frac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{4+(-1\pm\sqrt{3}\,i)}{2}=2+\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$
$$=2+\omega,\ 2+\omega^2$$

$2+\omega^2=2+(-\omega-1)=1-\omega$ であるから

$x=-3,\ 2+\omega,\ 1-\omega$ である。

§5．まとめ

等式 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

について，$c=x$ とすると

$$a^3+b^3+x^3-3abx$$
$$=(a+b+x)(a^2+b^2+x^2-ab-bx-xa)$$

つまり　$x^3-3abx+a^3+b^3$

$$=(x+a+b)\{x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2\}$$

であるから，x の 3 次式 $P(x)=x^3-3abx+a^3+b^3$ を考え，$P(x)$ が $x+a+b$ で割り切れることを因数定理で証明し，商 $x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2$ は組立除法で求めさせる問題を考えた。

また，3 次方程式の解と係数の関係と 3 乗の和の因数分解の公式を利用して証明させる問題も考えてみた。

更に，$x^3-3abx+a^3+b^3=0$ の形の 3 次方程式の解の公式を 1 の虚数立方根 ω を使って作り，それを使うことで解が求められる問題も考案してみた。

本考察が，先生方の研究や指導の参考になれば幸いである。

（山口県立徳山高等学校）