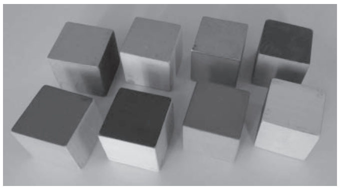
パズル「マダラダイス」の考察

なかむら　こういち
中村　公一

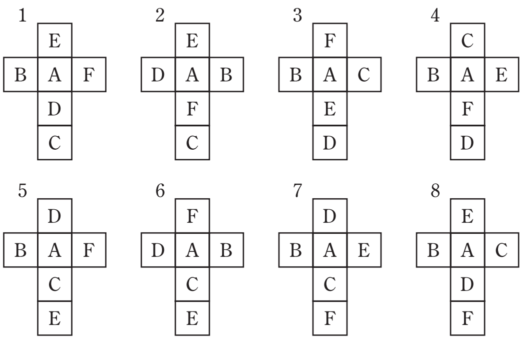
§0. はじめに

立方体の6面を6種類の色で塗り分ける方法は，全部で30通りあります。研究者の名前をとってマクマホン立方体という言葉もあります。そのうちの異なる8個を取り出して，一回り大きな2倍の大きさの立方体を作ります。(**以後 倍立方体 と言うことにします**)。そして，その倍立方体の6面をそれぞれ同一の色でそろえたり，6面を異なる4色で構成したりと，シンプルな遊びをすることができます。昭和23年に江口雅彦氏が考案して市販された物は「マダラダイス」と呼ばれています。もちろん紙などで手作りして，遊ぶのも面白いと思います。



市販されていたマダラダイスの8個の立方体は下の図1の通りです。図の立方体の展開図でABCDEFは6種類の色を意味します。

(図1)

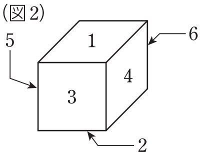


実際に遊んでみると，結構難しいことがわかります。特に各面を同一色でそろえることは簡単ではありません。そこでパソコンを使って強引にすべての場合を検証してみたことがあります。つまり，**倍立方体の各面の色をそろえる配置を正解とし**，以下の点に留意して検証しました。

・あらゆる8種類の立方体の組合せで調べること。
・選んだ8個の立方体で倍立方体を作る時は，あらゆる配置について調べること。
・選んだ8個の立方体で複数回の正解配置(全体を回転して一致する配置は同一として扱う)がある場合何通りの複数正解があるかどうか。

プログラムを組む上で，以下のような事項も確認しておくと便利です。
・立方体の色はABCDEFで表現する。
・Aを塗った面をおもて面，その向かいの面を裏面，それ以外の面を側面と言う。また面に番号を付けておもて面が1，裏面を2，側面を3456とする。
・30種類の立方体には番号01〜30を付ける。

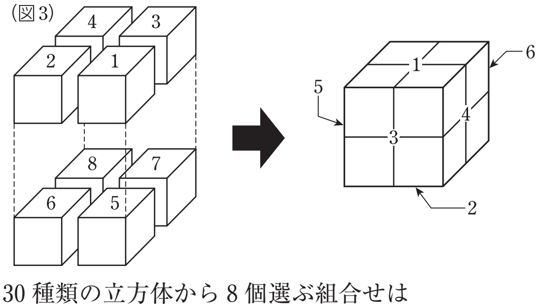
(図2)



注：矢印は見えていない
面を意味します。
以後，同様にします。

8個の立方体を配置するとき，図のような順番で置き，倍立方体の面の番号も図のように付ける。

(図3)



30種類の立方体から8個選ぶ組合せは ${}_{30}C_8=5852925$ 通り，番号の若い立方体を基準にして，他の7個の立方体の配置を考えると $7!=5040$ 通りあり，個々の立方体の向きも考慮しなければならないので，パソコンで丁寧に調べると数十日かかると思われます。ここでは，プログラムを組む上での工夫を説明し，後に出力結果からわかったことを述べたいと思います。

§1. プログラムの工夫

【色交換を考慮して組合せをグループ分けする】

30 種類ある立方体で，A が塗ってある面はおもて面としていますが，裏面の色がBのグループを「B組」，裏面がCのグループを「C組」…というように 5 組に分けます。それぞれの組は表 1 のように 6 個の異なる立方体で構成されます。

立方体No.	表①	裏②	側③	側④	側⑤	側⑥	組
01	A	B	C	D	E	F	B
02	A	B	C	D	F	E	
03	A	B	C	E	D	F	
04	A	B	C	E	F	D	
05	A	B	C	F	D	E	
06	A	B	C	F	E	D	
07	A	C	B	D	E	F	C
08	A	C	B	D	F	E	
09	A	C	B	E	D	F	
10	A	C	B	E	F	D	
11	A	C	B	F	D	E	
12	A	C	B	F	E	D	
13	A	D	B	C	E	F	D
14	A	D	B	C	F	E	
15	A	D	B	E	C	F	
16	A	D	B	E	F	C	
17	A	D	B	F	C	E	
18	A	D	B	F	E	C	
19	A	E	B	C	D	F	E
20	A	E	B	C	F	D	
21	A	E	B	D	C	F	
22	A	E	B	D	F	C	
23	A	E	B	F	C	D	
24	A	E	B	F	D	C	
25	A	F	B	C	D	E	F
26	A	F	B	C	E	D	
27	A	F	B	D	C	E	
28	A	F	B	D	E	C	
29	A	F	B	E	C	D	
30	A	F	B	E	D	C	

(表1)

たとえば，B 組から 5 組，C 組から 3 個選んで倍立方体を作るのも，F 組から 5 個，D 組から 3 個選んで倍立方体を作るのも状況は全く同じです。B とF，C とDの色を交換するのと同じです。5 個と 3 個の場合を 5-3 と表記するとします。5-3 のパターンを検証するには，B 組から 5 個，C 組から 3 個選んで検証すればよく，その数は ${}_6C_5 \times {}_6C_3 = 120$ 通り検証すればよいことになります。すべての組から 5 個と 3 個選ぶ選び方は ${}_5P_2 = 20$ 通りありますから，結果を 20 倍すれば良いのです。

6 個の立方体が，どのようなパターンで構成されるかは表 2 にまとめてある通り全部で 16 パターン考えられます。各パターンについて代表的な組合せだけ検証していけば，合計 319272 組の検証で済みます。またこの方法だと，それぞれのパターンに分けて検証できるので分散させて検証をすることも可能です。最大の検証回数が必要なパターンは，2-2-2-1-1 で 121500 回ですが，さらに時間も半分にする方法があります。それは次に説明します。

(表2)

構成パターン	検証総数	倍率	実際の組合せ総数
6-2	15	20	300
6-1-1	36	30	1,080
5-3	120	20	2,400
5-2-1	540	60	32,400
5-1-1-1	1,296	20	25,920
4-4	225	10	2,250
4-3-1	1,800	60	108,000
4-2-2	3,375	30	101,250
4-2-1-1	8,100	60	486,000
4-1-1-1-1	19,440	5	97,200
3-3-2	6,000	30	180,000
3-3-1-1	14,400	30	432,000
3-2-2-1	27,000	60	1,620,000
3-2-1-1-1	64,800	20	1,296,000
2-2-2-2	50,625	5	253,125
2-2-2-1-1	121,500	10	1,215,000
合計	319,272		5,852,925

【2-2-2-1-1 の計算での工夫】

すべての立方体の色BとCを交換した場合，B 組とC組は入れ替わり，D 組とE組はそのままです。

F 組の立方体を見てみます。

(図 4)

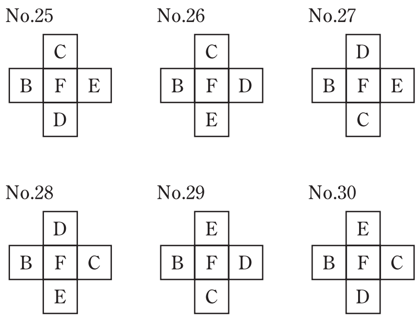


図 4 はおもて面Aを省略して展開したＦ組の立方体の展開図です。ここで，B とCを交換すると 25 番の立方体が 29 番に，26 番の立方体が 27 番に，28 番の立方体が 30 番になることがわかります。つまり 25，26，28 の 3 種類だけを使って 2-2-2-1-1 のすべての組合せを考えた場合は，27，29，30 の 3 種類だけを使って 2-2-2-1-1 のすべての組合せを考えた場合と同じ状況になるということです。C とDの交換で考えても同様ですが，B とEの交換などは同じ状況になりません。2-2-2-1-1 はB組から 2 個E組から 1 個の立方体を選び出して検証するからです。具体的には，2-2-2-1-1 の検証をするときは，B 組より 2 個，C 組より 2 個，D 組より 2 個，E 組より 1 個，そしてF組からは 25，26，28 番の 3 個の立方体から 1 個を選び，回数を半分の 60750 回にして調

べることができます。なお，同様の発想は，5-1-1-1，4-1-1-1-1，3-3-1-1，3-2-2-1，3-2-1-1-1 でも応用できます。

§2. 出力結果から

【正解の倍立方体の色数について】

倍立方体の各面の色をそろえるパズルですが，組合せによって複数の正解があることがわかりました。また，そろった 6 面の色の中に同じ色がある場合があります。隣り合う面は絶対に異なる色になりますが，向かい合う面が同色になる場合が出現します。全体が 3 色で構成される場合を最小として，4 色，5 色，6 色の 4 つの場合があります。それぞれ **3 色正解**，**4 色正解**，**5 色正解**，**6 色正解**と呼ぶことにします。プログラムの一部を修正するだけで調べることが可能です。6 色正解が一番美しいので特別に検証し，他の種類もどのくらい発生するのか希少性チェックのために調べました。

(表3)　　　　　　　　正解発生状況

パターン	組合せ総数	結果（倍率補正済）	
		正解がある組合せ数	正解がない組合せ数
6-2	300	300	0
6-1-1	1,080	1,080	0
5-3	2,400	2,400	0
5-2-1	32,400	32,400	0
5-1-1-1	25,920	25,920	0
4-4	2,250	2,250	0
4-3-1	108,000	108,000	0
4-2-2	101,250	101,250	0
4-2-1-1	486,000	486,000	0
4-1-1-1-1	97,200	97,200	0
3-3-2	180,000	180,000	0
3-3-1-1	432,000	431,640	360
3-2-2-1	1,620,000	1,616,880	3,120
3-2-1-1-1	1,296,000	1,290,480	5,520
2-2-2-2	253,125	252,165	960
2-2-2-1-1	1,215,000	1,209,840	5,160
合計	5,852,925	5,837,805	15,120

一般の正解では，全体で 5852925 通りのうち絶対に 6 面がそろわない，正解のない組合せが 15120 通りあります。裏をかえせば，意外と高い確率 $\frac{5837805}{5852925} \fallingdotseq 0.997$ で正解がある組合せが存在することがわかります。

表 4 にあるように 5 色正解をもつ組合せが一番多く，3 色正解が一番少ないことがわかります。

(表4)　　　　　　正解をもつ組合せ数(色数別)

パターン	色数別正解をもつ組合せの数（倍率補正済）			
	3色正解	4色正解	5色正解	6色正解
6-2	0	300	300	0
6-1-1	0	900	1,080	0
5-3	0	2,280	2,400	480
5-2-1	0	24,960	32,400	8,640
5-1-1-1	0	14,520	25,920	7,440
4-4	30	2,010	2,250	540
4-3-1	720	60,480	108,000	36,000
4-2-2	840	54,750	101,250	36,630
4-2-1-1	0	192,480	485,520	180,000
4-1-1-1-1	0	2,340	97,200	37,440
3-3-2	1,920	82,920	179,760	82,920
3-3-1-1	0	154,320	431,160	211,200
3-2-2-1	0	550,920	1,615,920	869,640
3-2-1-1-1	0	138,960	1,289,760	704,760
2-2-2-2	0	87,525	251,925	153,015
2-2-2-1-1	0	193,260	1,208,160	749,280
合計	3,510	1,562,925	5,833,005	3,077,985

同じ 8 個の立方体の組でも，個々の立方体の配置や向きが違う別な正解があるときはすべて異なる正解として累計してみたのが表 5 です。一つの組でも 6 色正解複数個と 3 色正解複数個などをもつ場合もあります。それぞれ色数別に累計してみました。そのうち最多の複数正解は(表には掲載してありませんが)444 通りで，60 組あります。そのうち 1 組を図 5 に紹介しておきます。図 5 の 8 個の立方体の組は，288 個の 3 色正解，48 個の 4 色正解，108 個の 5 色正解を持ち，6 色正解はありません。

(表5)　　　　　　色別正解の累計数

パターン	組合せ総数	種類別　正解累計出現回数（倍率補正済）			
		3色正解	4色正解	5色正解	6色正解
6-2	300	0	23,040	19,680	0
6-1-1	1,080	0	38,400	63,360	0
5-3	2,400	0	92,160	51,840	3,840
5-2-1	32,400	0	568,320	727,680	57,600
5-1-1-1	25,920	0	215,040	583,680	46,080
4-4	2,250	8,640	77,760	43,740	1,440
4-3-1	108,000	138,240	1,251,840	1,572,480	134,400
4-2-2	101,250	155,520	1,064,640	1,517,160	149,040
4-2-1-1	486,000	0	2,764,800	7,000,320	804,480
4-1-1-1-1	97,200	0	69,120	1,432,320	180,480
3-3-2	180,000	345,600	1,359,360	2,430,720	307,200
3-3-1-1	432,000	0	2,035,200	5,460,480	798,720
3-2-2-1	1,620,000	0	7,572,480	20,557,440	3,548,160
3-2-1-1-1	1,296,000	0	1,689,600	16,227,840	3,179,520
2-2-2-2	253,125	0	1,292,160	3,190,740	674,520
2-2-2-1-1	1,215,000	0	2,188,800	14,695,680	3,601,920
合計	5,852,925	648,000	22,302,720	75,575,160	13,487,400

表 6 が 6 色正解をまとめたものです。6 色正解ができる組合せの数は 3077985 で全体の過半数です。また，特に癖のある配色 6-2 とか 6-1-1 のパターンでは 6 色正解にもつ組合せはありません。

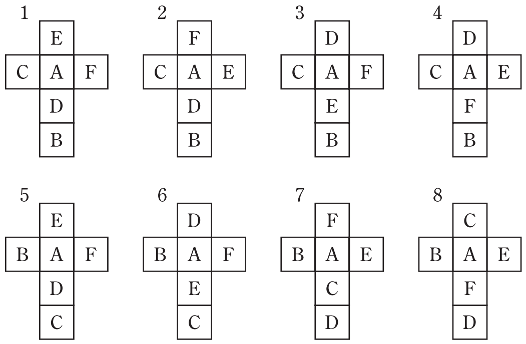
同一の組合せでもいくつ複数の 6 色正解があるのかも調べてみました。最大で 24 個の複数正解をもつものがみつかりました。図 6 に紹介しておきます。(6 色正解の 24 通りの他に 5 色正解が 12 通りあります)
また，6 色正解は，必ず複数正解で発生する。つまり少なくとも 2 つの 6 色正解をもつことがわかりま

す。そのメカニズムについても後の「正解の唯一性」で述べます。

(表6)　　　　6色正解

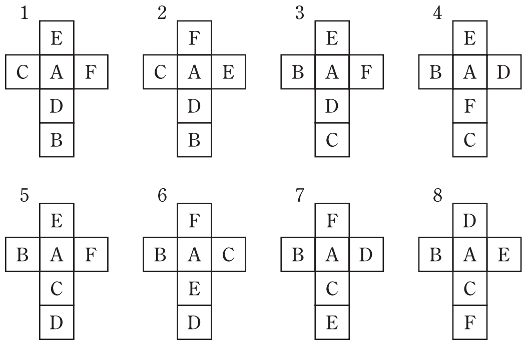
パターン	倍率補正済結果 6色正解がある組合せ数	倍率補正済結果 6色正解がない組合せ数	6色正解を持つ組の中で 6色複数正解最多数	6色正解を持つ組の中で 6色複数正解最少数
6-2	0	300		
6-1-1	0	1,080		
5-3	480	1,920	8	8
5-2-1	8,640	23,760	8	4
5-1-1-1	7,440	18,480	8	4
4-4	540	1,710	4	2
4-3-1	36,000	72,000	10	2
4-2-2	36,630	64,620	12	2
4-2-1-1	180,000	306,000	16	2
4-1-1-1-1	37,440	59,760	12	2
3-3-2	82,920	97,080	18	2
3-3-1-1	211,200	220,800	18	2
3-2-2-1	869,640	750,360	16	2
3-2-1-1-1	704,760	591,240	18	2
2-2-2-2	153,015	100,110	16	2
2-2-2-1-1	749,280	465,720	24	2
合計	3,077,985	2,774,940		

(図5)　　　　最多複数正解をもつ組合せ



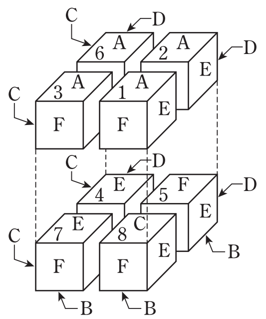
注：数字は選んだ6個の立方体を区別するためのもの
以後同様に使用します。

(図6)　　　　最多複数の6色正解をもつ組合せ



また，8個の立方体で配色バランスが良いのは，2-2-2-2と2-2-2-1-1のパターンでしょう。冒頭で紹介した江口氏考案のマダラダイスは6色どの色をおもて面にしても2-2-2-2に属します。江口氏のマダラダイスも検証したところ64通りの正解（6色正解は16通り，4色正解は48通り）があります。正解の作り方の一例が図7です。

(図7)　　　　江口氏のマダラダイス正解例



(注)　番号は図1での立方体を区別する番号

今回，Aという色についてパターン分けしましたが，どの色を中心にパターン分けしても同じことです。ただし，Aについては例えば4-2-1-1のパターンであっても他の色についても同じパターンになるという保証はありません。よって，異なる30種類の立方体から8個の立方体を選んだとき，各色について16パターンのどれに当てはまるか調べます。それにより，どのような倍立方体を作れるかの予想に役立ちます。以下に法則をまとめてみました。

① **ある色について6-2，6-1-1，5-3，5-2-1，5-1-1-1，4-4，4-3-1，4-2-2，4-2-1-1，4-1-1-1-1，3-3-2のいずれかになっていれば正解をもつ**。

② **ある色について6-2，6-1-1のいずれかになっていれば6色正解をもたない**。

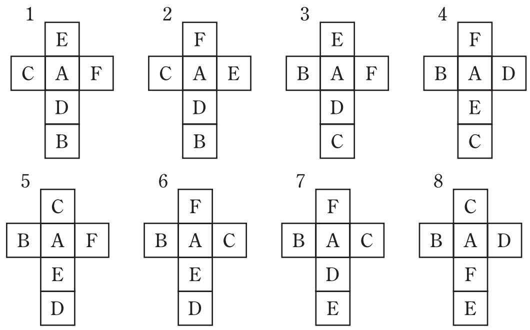
③ **3色正解をもつならば，すべての色について4-4，4-3-1，4-2-2，3-3-2のいずれかに当てはまっている**。

①は，表3から実証されていますが，逆は必ずしも成り立ちません。図1の江口氏のマダラダイスは，正解をもち，しかもすべての色について2-2-2-2のパターンで反例になります。

②についても逆は必ずしも成り立ちません。反例として図8を紹介しておきます。その組合せは6色正解を持たず，すべての色について2-2-2-2です。

③については理論的にも説明できます。図9をごらんください。すべての対面が同じ色になり，仮にABCの3色で構成されるとします。倍立方体の頂点に注目すると各頂点に配置される立方体は図の8個に限定されます。残りの3色DEFをどの空白に配色するか考えると4-4，4-3-1，4-2-2，3-3-2しかありません。

（図8） 全ての色について 2-2-2-2 でも 6 色正解がない例



（図9）

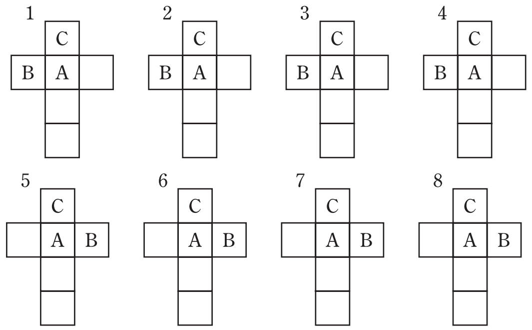


表 4 から以下のようなことが予想されました。

・6 色正解をもつ組合せは，5 色正解ももつ。

・3 色正解をもつ組合せは，4 色正解や 5 色正解，6 色正解ももつ。

パソコンで検証したところ，ほぼすべてに反例があり否定されました。ただ唯一次の事項は確認できました。

④ **3 色正解をもつ組合せは，5 色正解をもつ**。

本当かどうかは，パソコンで検証するのが手っ取り早いです。3 色正解をもつパターン 4-4，4-3-1，4-2-2，3-3-2 について 3 色正解をもつ組合せ 3510 通りすべてについて，4 色正解，5 色正解，6 色正解があるかどうか調べたのが表 7 です。

（表3） 3色正解をもつ組合せの中での調査

パターン	検証総数	3色正解をもつ組合せ（倍率補正済）の中で			
		3色正解	4色正解	5色正解	6色正解
4−4	225	30	30	30	0
4−3−1	1,800	720	720	720	0
4−2−2	3,375	840	840	840	60
3−3−2	6,000	1,920	1,080	1,920	120
合計	11,400	3,510	2,670	3,510	180

おもしろい結果ですが，3 色正解をもつ組合せは必ず 5 色正解も持ちます。また，パターン 4-4，4-3-1，4-2-2 では 4 色正解も必ず持ちます。

【正解の唯一性について】

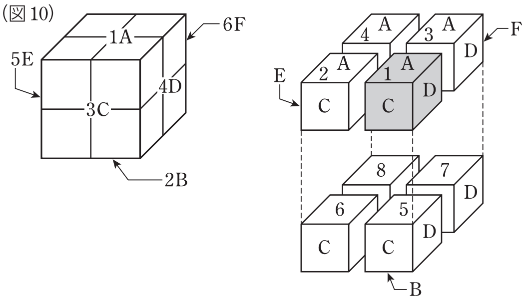
選んだ 8 個の立方体の組が正解をもつとき，個々の立方体の配列や向きをかえることで，別な正解が生じる場合があります。しかし，正解が 1 通りだけという場合はあるでしょうか。あるとすれば非常に希少な組合せではあります。結論は下記の通りです。

⑤ **3 色正解，4 色正解，6 色正解は，倍立方体の配色をそのままに保ったままの別の正解をもつ**。

⑥ **5 色正解で複数正解を持たない組が存在する**。

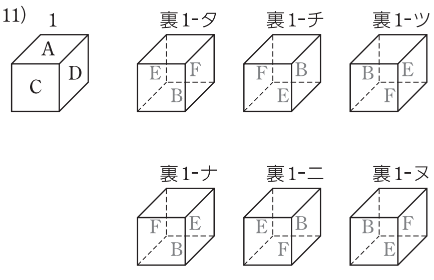
表 6 にあるとおり 6 色正解についてはパソコンで検証もされていますが，⑤については，下記のように理論的に推理もできます。まず 6 色正解の場合図 10 のように倍立方体の面 1 から 6 までの面が A から F までの色で揃っているとします。

（図10）



このとき，8 個の立方体の 1 番の立方体に注目します（図 10 で網掛けの立方体）。1 番の立方体の外側の面は，倍立方体と同じ ACD の色が使われています。内側の隠れた面には残りの BEF の色が使われ，その配置は図 11 にあるような裏 1−タから裏 1−ヌまでの 6 通りが考えられます。

（図11）



注：薄いアルファベットは隠れた面の色を意味します。

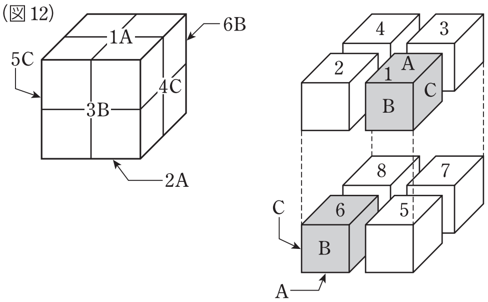
このうち裏 1−タの時はそのまま他の立方体の位置に移動することができます。また，裏 1−チと裏 1−ツの時は回転させてから倍立方体の対角の位置にある 8 番の立方体の位置に移動することができます。次に裏 1−ナの時は 5 番の立方体の位置へ，裏 1−ニの時は 2 番の立方体の位置へ，裏 1−ヌの時は 3 番の

立方体の位置へ立方体を移動することが可能です。今は１番立方体について述べましたが，他の立方体についても同様で，６色正解の場合は，すべての位置にある立方体を他の位置へ移動することが可能です。このとき倍立方体の配色には変化はありません。

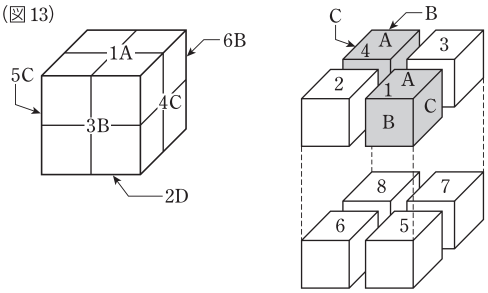
そこで，例えば１番の位置の立方体が５番の位置へ移動でき，５番の位置にあった立方体が１番の位置に移動可能ならば，１番と５番の位置の立方体を交換可能というわけで，異なる立方体の配列になります。もし交換がおこらない場合は，順に移動した場所を書いていくと１→５→６→３→となっていき，全部で８までの場所しかありませんから必ず前に使用した場所に戻るところがあります。たとえば１→５→６→３→７→２→６の移動なら最初のスタートを６から始めることにより６→３→７→２→６のローテーションが可能であることがわかるわけです。最長の移動だと８個全部の立方体を移動というのもありえます。以上より６色正解の配置は，必ず立方体を移動することにより他の配置の６色正解を作ることが可能になります。

３色正解は図12のような場合ですが，１番立方体を回転させて４番や６番，７番の立方体と交換可能です。４色正解は図13のような場合ですが，こちらも１番立方体と４番の立方体と交換可能です。以上から３色正解や４色正解には複数の正解が生まれることとなります。

(図12)

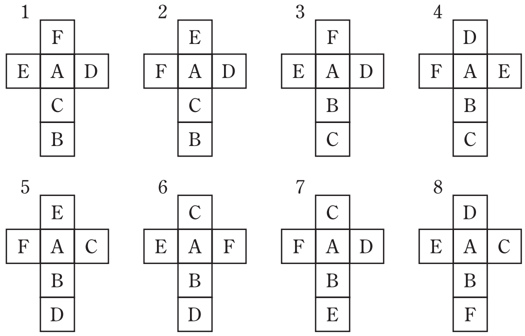


(図13)

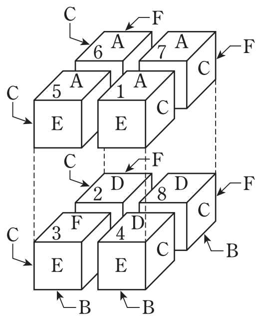


次に⑥ですが，パソコンで検証したところ５色正解のときに１通りの正解しか存在しない場合が全体で7290組ありました。例えば図14は他に３色正解や４色正解，６色正解を持たず，５色正解しかありません。その５色正解も１通りしかない例です。つまり，交換とかローテーションが存在しない組合せです。

(図14)　　たった１通りの５色正解しかない組合せ



正解



§3.　残された課題

パソコンを使って法則を発見してから理論的説明を見つけていくような手法で，泥臭い数学になってしまいすみませんでした。その中で心残りは，

④　３色正解をもつ組合せは，５色正解をもつ。

のパソコンを使わない証明方法があるかどうか。

あと５色正解の意外な事実（３色正解との関係，唯一解の存在）が，今後のパズルや簡単な鍵や暗号に応用できないか，あれこれ試案しています。

《参考文献》

〔１〕　PLAY PUZZLE パズルの世界　高木茂男著
平凡社（1981年初版　2012年復刻版）

（元 長野県飯山高等学校）