正弦·余弦の比と三角形の成立条件について

久末（ひさすえ）　正樹（まさき）

§1. 正弦の比と三角形

三角形 ABC において例えば正弦の比

$$\sin A : \sin B : \sin C = 2:3:4$$

が成り立つとき，正弦定理により

$\sin A : \sin B : \sin C = \mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB}$ であるから $\mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB} = 2:3:4$ となり，辺の比がわかることから三角形の形を知ることができる。つまり正弦の比 $\sin A : \sin B : \sin C = a:b:c$ が与えられると，三角形の形状がわかる。

逆に，先に正の実数の比 $a:b:c$ が与えられたとき，$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C$ を満たすような三角形 ABC が存在する条件を考える。三角形 ABC が存在するということは，三角形 ABC の外接円が存在するということであるから，外接円の半径を R とすると正弦定理により

$\sin A = \dfrac{\mathrm{BC}}{2R}$，$\sin B = \dfrac{\mathrm{CA}}{2R}$，$\sin C = \dfrac{\mathrm{AB}}{2R}$ であるから $\mathrm{BC} : \mathrm{BA} : \mathrm{AB} = a:b:c$ となる。また AB, BC，CA の満たす条件は三角形の成立条件により $|\mathrm{BC} - \mathrm{CA}| < \mathrm{AB} < \mathrm{BC} + \mathrm{CA}$ であるから，a，b，c の満たす条件は $|a-b| < c < a+b$ となる。

§2. 余弦の比と三角形

このセクションでは §1 で正弦で考察したことを余弦で考える。先に $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ の比が与えられているとき，三角形 ABC の 3 辺の長さの比は 3 次方程式を解くことに帰着される。以下，具体例で考えてみよう。三角形 ABC において

$\cos A : \cos B : \cos C = 13 : 11 : (-7)$ のとき

$\cos A = 13x$，$\cos B = 11x$，$\cos C = -7x$ と書ける。

但し x は $0 \leqq x < \dfrac{1}{13}$ を満たす実数と仮定してよい。

$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$，$\mathrm{AB} = c$ とすると余弦定理により

$$a^2 = b^2 + c^2 - 26bcx \quad \cdots\cdots①$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 22cax \quad \cdots\cdots②$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 14abx \quad \cdots\cdots③$$

を得る。

①＋②より　$c = (11a + 13b)x$ ……④

①＋③より　$b = (-7a + 13c)x$ ……⑤

②＋③より　$a = (-7b + 11c)x$ ……⑥

ここで④を⑤，⑥に代入するとそれぞれ

$$(143x^2 - 7x)a + (169x^2 - 1)b = 0 \quad \cdots\cdots⑦$$

$$(121x^2 - 1)a + (143x^2 - 7x)b = 0 \quad \cdots\cdots⑧$$

を得るから，この 2 式より

$(143x^2 - 7x)^2 - (169x^2 - 1)(121x^2 - 1) = 0$ が成り立つ。

よって 3 次方程式 $2002x^3 - 339x^2 + 1 = 0$ が得られ，これは因数分解できて

$(14x - 1)(143x^2 - 14x - 1) = 0$ となる。

仮定より $0 \leqq x < \dfrac{1}{13}$ であるから $x = \dfrac{1}{14}$ を得ることができる。これを⑥，⑦に代入することにより

$a:b:c = 3:5:7$ を得る。

このように余弦の比が与えられたときに 3 次方程式が得られるので，それを解くことにより 3 辺の比がわかり，三角形 ABC の形状を求めることができる。

今度は逆に実数 a，b，c に対して

$\cos A : \cos B : \cos C = a:b:c$ を満たす三角形 ABC が存在するための a，b，c の条件を求めてみよう。$a \geqq b \geqq c$ としても一般性を失わない。

$\cos A = ax$，$\cos B = bx$，$\cos C = cx$（x は実数）とおく。

(i)　$c > 0$ のとき

三角形 ABC が存在するとすると

$A + B + C = \pi$ であるから

$$\begin{aligned}\cos C &= \cos(\pi - (A+B)) \\ &= -\cos(A+B) \\ &= \sin A \sin B - \cos A \cos B\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\cos A \cos B + \cos C &= \sin A \sin B \\ &= \sqrt{1-\cos^2 A}\sqrt{1-\cos^2 B}\end{aligned}$$

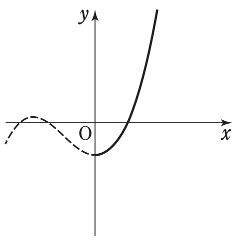
であるから $abx^2+cx=\sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-b^2x^2}$ となる。
両辺２乗して整理すると

$$2abcx^3+(a^2+b^2+c^2)x^2-1=0 \qquad \cdots\cdots(☆)$$

この左辺を $f(x)$ とする。

$a \geqq b>0$ であるから $0<\dfrac{1}{a} \leqq \dfrac{1}{b}$ が成り立ち，かつ $ax<1$ であるから $0<x<\dfrac{1}{a}$ の範囲に(☆)を満たす実数 x が存在すれば三角形 ABC は成立する。

(i) $c>0$ のとき



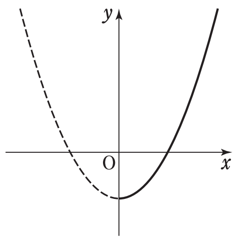
$f'(x)=0$ を満たす x は $x=0,\ -\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}$ であり $x \geqq 0$ において単調に増加し

$f(0)=-1<0$,

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\left(\dfrac{b+c}{a}\right)^2>0$ であるから

中間値の定理により $0<x<\dfrac{1}{a}$ の範囲に(☆)を満たす実数 x が存在するので常に三角形が存在する。

(ii) $c=0$ のとき



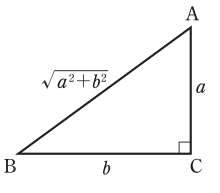
$f(x)=(a^2+b^2)x^2-1$ は下に凸の２次関数であり，

$f(0)=-1<0$,

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2>0$ であるから $0<x<\dfrac{1}{a}$ の範囲に(☆)を満たす実数 x が存在するので常に三角形が存在する。

$f(x)=0$ を満たす x は $x=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるから

$\cos A=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos B=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となり，次のような直角三角形となる。



(iii) $c<0$ のとき

三角形 ABC が存在するならば $0<B<A+B<\pi$ であるから

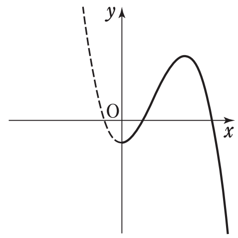
$b+c=\cos B+\cos C=\cos B-\cos(A+B)>0$

である。

逆に $b+c>0$ のときに三角形 ABC が存在するための条件を調べる。

$f\left(-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}\right)=\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^3}{27a^2b^2c^2}-1$ であり，

相加平均と相乗平均の関係から



$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geqq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

であるから

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \geqq 1$ となり，

両辺を３乗して

$\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^3}{27a^2b^2c^2} \geqq 1$ となり，ここで $b+c>0$ より $b^2 \neq c^2$ であるから等号成立条件を満たさないので $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^3}{27a^2b^2c^2}>1$

となり，$f\left(-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}\right)>0$ である。また

$a \geqq b>0$ かつ $b+c>0$ より $bc>-b^2$ であるから $a^2+bc>a^2-b^2>0$ が成り立つので

$-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{a^2+bc+(b+c)^2}{3abc}>0$

である。

$f(0)=-1<0$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\left(\dfrac{b+c}{a}\right)^2>0$ であるから

$0<x<\dfrac{1}{a}$ の範囲に(☆)を満たす実数 x が存在するので題意を満たすような三角形 ABC が存在する。

以上より三角形 ABC が成立するための条件は $a+b>0$，$b+c>0$，$c+a>0$ である。

§3. まとめ

以上の考察をまとめると，次のようになる。

> 正弦の比が実数 a，b，c になる
> $\Longrightarrow$ 余弦定理により三角形の形が簡単に求まる
> 実数 a，b，c が正弦の比になる
> $\Longrightarrow |a-b|<c<a+b$
> 余弦の比が実数 a，b，c になる
> $\Longrightarrow$ 余弦定理により三角形の形は求まるが，３次方程式を解かなければならない
> 実数 a，b，c が余弦の比になる
> $\Longrightarrow a+b>0$，$b+c>0$，$c+a>0$

(北海道　市立函館高等学校)