隣接 4 項間漸化式と虚数の利用で確率の変化を調べる

精松（あべまつ）　祐介（ゆうすけ）

§1. はじめに

筆者が高校時代に隣接 2 項間＆隣接 3 項間漸化式を学習した際に，様々な解法に感動したことを今でも鮮明に記憶している。高校時代から隣接 4 項間漸化式に対して数学的好奇心があり，本時は「隣接 4 項間漸化式の等比数列型変形」を起点にし，高校の範囲内で隣接 4 項間漸化式の一般項を考えていく。

§2. 隣接 4 項間漸化式を等比数列型に変形する公式を作る

自作 公式：s，t，u を定数とするとき

隣接 4 項間の漸化式

$$a_{n+3}=sa_{n+2}+ta_{n+1}+ua_n \cdots\cdots (\bigstar)$$

は，3 次方程式 $x^3=sx^2+tx+u$ の任意の解を γ とすると，以下の等比数列型の漸化式に変形できる。

$$a_{n+3}+(\gamma-s)a_{n+2}+(\gamma^2-s\gamma-t)a_{n+1}$$
$$=\gamma\{a_{n+2}+(\gamma-s)a_{n+1}+(\gamma^2-s\gamma-t)a_n\}$$

証明　$(\bigstar)$が

$a_{n+3}+\alpha a_{n+2}+\beta a_{n+1}=\gamma(a_{n+2}+\alpha a_{n+1}+\beta a_n)$ に変形できたと仮定する。このとき

$$a_{n+3}=(\gamma-\alpha)a_{n+2}+(\gamma\alpha-\beta)a_{n+1}+\gamma\beta a_n$$

より，$(\bigstar)$と係数を比較すると

$$\begin{cases}\gamma-\alpha=s & \cdots\cdots ① \\ \gamma\alpha-\beta=t & \cdots\cdots ② \\ \gamma\beta=u & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

①，②より

$$\alpha=\gamma-s,\ \beta=\gamma^2-s\gamma-t \cdots\cdots ④$$

③，④より

$$\gamma^3=s\gamma^2+t\gamma+u \cdots\cdots ⑤$$

よって，⑤より，

γ は 3 次方程式 $x^3=sx^2+tx+u$ の任意の解であり，γ が決定すれば，④より α，β は一意に定まる。

よって，$(\bigstar)$は

$$a_{n+3}+(\gamma-s)a_{n+2}+(\gamma^2-s\gamma-t)a_{n+1}$$
$$=\gamma\{a_{n+2}+(\gamma-s)a_{n+1}+(\gamma^2-s\gamma-t)a_n\}$$

に変形できる。　終

§3. 隣接 4 項間漸化式の問題を高校生を対象として出題する場合の問題例

大学入試で漸化式が出題される場合，隣接 2 項間及び 3 項間漸化式までの出題が圧倒的に多いが，誘導形式問題であれば，以下に示すような問題を高校生に出題することも可能ではなかろうか。

自作 問題：s，t，u を定数とする漸化式

$$a_{n+3}=sa_{n+2}+ta_{n+1}+ua_n \cdots\cdots (\bigstar)$$

がある。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対して，$(\bigstar)$が

$$a_{n+3}+\alpha a_{n+2}+\beta a_{n+1}=\gamma(a_{n+2}+\alpha a_{n+1}+\beta a_n)$$

の形にかけるとき，

$$\alpha=\gamma-s,\ \beta=\gamma^2-s\gamma-t$$

が成り立つことを示せ。

(2)　(1)のとき，γ は x の 3 次方程式

$$x^3=sx^2+tx+u$$

の解であることを示せ。

(3)　(1)，(2)を用いて，次の漸化式

$$\begin{cases}a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=2 \\ a_{n+3}=2a_{n+2}+5a_{n+1}-6a_n\end{cases}$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1) **解答**　すべての自然数 n に対して，$(\bigstar)$が

$$a_{n+3}=(\gamma-\alpha)a_{n+2}+(\gamma\alpha-\beta)a_{n+1}+\gamma\beta a_n$$

の形にかけるので，$(\bigstar)$と係数を比較すると

$$\begin{cases} \gamma-\alpha=s & \cdots\cdots① \\ \gamma\alpha-\beta=t & \cdots\cdots② \\ \gamma\beta=u & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①より，$\alpha=\gamma-s$ ……④

②，④より，$\gamma(\gamma-s)-\beta=t$

$$\beta=\gamma(\gamma-s)-t=\gamma^2-s\gamma-t$$

よって

$$\alpha=\gamma-s,\ \beta=\gamma^2-s\gamma-t$$

が成り立つ。

(2) **解答** $\beta=\gamma^2-s\gamma-t$ を(1)の③に代入すると

$$\gamma(\gamma^2-s\gamma-t)=u$$

$$\gamma^3-s\gamma^2-t\gamma=u$$

$$\therefore\quad \gamma^3=s\gamma^2+t\gamma+u$$

したがって，γ は x の3次方程式

$$x^3=sx^2+tx+u$$

の解である。

(3) **解答**

$x^3=2x^2+5x-6$ を解くと

$$(x-1)(x-3)(x+2)=0$$

$$x=-2,\ 1,\ 3$$

よって，(2)より，$\gamma=-2,\ 1,\ 3$ としてよい。

$s=2,\ t=5$ より，(1)の結果から

$$a_{n+3}+(\gamma-2)a_{n+2}+(\gamma^2-2\gamma-5)a_{n+1}$$
$$=\gamma\{a_{n+2}+(\gamma-2)a_{n+1}+(\gamma^2-2\gamma-5)a_n\}$$

したがって，$\gamma=-2,\ 1,\ 3$ を代入すると

$$\begin{cases} a_{n+3}-4a_{n+2}+3a_{n+1}=-2(a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n) \\ a_{n+3}-a_{n+2}-6a_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n \\ a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n) \end{cases}$$

が成り立つ。

よって

$$\begin{cases} a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=(a_3-4a_2+3a_1)\cdot(-2)^{n-1} \\ a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=(a_3-a_2-6a_1)\cdot 1^{n-1} \\ a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=(a_3+a_2-2a_1)\cdot 3^{n-1} \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=(-2)^n & \cdots\cdots① \\ a_{n+2}-a_{n+1}-6a_n=1 & \cdots\cdots② \\ a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=3^n & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①−② および ②−③ より

$$\begin{cases} -3a_{n+1}+9a_n=(-2)^n-1 & \cdots\cdots④ \\ -2a_{n+1}-4a_n=1-3^n & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

④×2−⑤×3 より

$$30a_n=2\cdot(-2)^n-2-3+3^{n+1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{3^{n+1}-(-2)^{n+1}-5}{30}\ \cdots\cdots\ \boxed{答}$$

§4. 確率を漸化式を利用して求める

問題：〈名古屋大学入試問題〉 円周上に，右まわりの順で3点A，B，Cがあり，円周上にそってこれらの点の上を右まわりに進むものとする。1つのサイコロを投げて，偶数の目が出ればその数だけ進み，奇数ならば1つ進む試行をくり返す。初めAにいて，n 回の試行の後でAにいる確率を p_n，Bにいる確率を q_n，Cにいる確率を r_n として，次の問いに答えよ。

(1) p_n を r_{n-1} $(n\geqq 2)$ で表せ。

(2) p_{3n} を求めよ。

確率 p_n を1つの式で表すことが困難なとき，n の場合分けによって(ここでは，n が3の倍数のとき) p_n を求める問題は入試でしばしば出題される。今回，(1)，(2)の計算は省略し，n を場合分けせず，隣接4項間漸化式の特性方程式の虚数解を利用したり，別解として連立漸化式の等比数列化の係数に現れる虚数解を利用して，確率 p_n，q_n，r_n を1つの式で表してみる。また，それをグラフ化し，変化を調べてみる(なお，別解として連立漸化式の等比数列化の係数に現れる虚数解を利用する方法もある)。

解答 $n+1$ 回の試行後にAにいるためには以下の場合がある。

(i) n 回の試行後にAにいて，6の目が出る。

(ii) n 回の試行後にBにいて，2の目が出る。

(iii) n 回の試行後にCにいて，奇数または4の目が出る。

$n+1$ 回の試行後にBにいるためには以下の場合がある。

(i) n 回の試行後にAにいて，奇数または4の目が出る。

(ii) n 回の試行後にBにいて，6の目が出る。

(iii) n 回の試行後にCにいて，2の目が出る。

$n+1$ 回の試行後にCにいるためには以下の場合がある。

(i) n 回の試行後にAにいて，2の目が出る。

(ii) n 回の試行後にBにいて，奇数または4の目が出る。

(iii) n 回の試行後にCにいて，6の目が出る。

よって

$$\begin{cases} p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{2}{3}r_n \cdots\cdots① \\ q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{1}{6}r_n \cdots\cdots② \\ r_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{2}{3}q_n+\frac{1}{6}r_n \cdots\cdots③ \\ p_n+q_n+r_n=1 \quad \cdots\cdots④ \end{cases}$$

①，②，③に④を利用すると

$$\begin{cases} p_{n+1}=\frac{1}{6}(1-r_n)+\frac{2}{3}r_n=\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{6} \cdots\cdots⑤ \\ q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}(1-p_n)=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{6} \cdots\cdots⑥ \\ r_{n+1}=\frac{1}{6}(1-q_n)+\frac{2}{3}q_n=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{6} \cdots\cdots⑦ \end{cases}$$

⑤，⑥，⑦より

$$\begin{aligned} p_{n+1}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6} \\ &=\frac{1}{4}q_{n-1}+\frac{1}{4} \\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{4} \\ &=\frac{1}{8}p_{n-2}+\frac{7}{24} \end{aligned}$$

つまり

$$p_{n+3}=\frac{1}{8}p_n+\frac{7}{24}$$

ここで，隣接4項間漸化式について，§2の自作 $\boxed{\text{公式}}$ を使う。

それでは，$x^3=\frac{1}{8}$ を解くと

$(2x-1)(4x^2+2x+1)=0$ より，$x=\frac{1}{2}$，α，β

ただし，α，β は $4x^2+2x+1=0$ の解で

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{4},\ \beta=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{4} \cdots\cdots (☆)$$

とおく。

自作 $\boxed{\text{公式}}$ より，$s=0$，$t=0$ から

$$\begin{aligned} &a_{n+3}+\gamma a_{n+2}+\gamma^2 a_{n+1} \\ &=\gamma\{a_{n+2}+\gamma a_{n+1}+\gamma^2 a_n\}+\frac{7}{24} \end{aligned}$$

したがって，$\gamma=\frac{1}{2}$，α，β を代入すると

$$\begin{aligned} &p_{n+3}+\frac{1}{2}p_{n+2}+\frac{1}{4}p_{n+1} \\ &=\frac{1}{2}\left(p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{4}p_n\right)+\frac{7}{24} \\ &p_{n+3}+\alpha p_{n+2}+\alpha^2 p_{n+1} \\ &=\alpha\{p_{n+2}+\alpha p_{n+1}+\alpha^2 p_n\}+\frac{7}{24} \\ &p_{n+3}+\beta p_{n+2}+\beta^2 p_{n+1} \\ &=\beta\{p_{n+2}+\beta p_{n+1}+\beta^2 p_n\}+\frac{7}{24} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} &p_{n+3}+\frac{1}{2}p_{n+2}+\frac{1}{4}p_{n+1}-\frac{7}{12} \\ &=\frac{1}{2}\left(p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{4}p_n-\frac{7}{12}\right) \\ &p_{n+3}+\alpha p_{n+2}+\alpha^2 p_{n+1}-\frac{7}{24(1-\alpha)} \\ &=\alpha\left\{p_{n+2}+\alpha p_{n+1}+\alpha^2 p_n-\frac{7}{24(1-\alpha)}\right\} \\ &p_{n+3}+\beta p_{n+2}+\beta^2 p_{n+1}-\frac{7}{24(1-\beta)} \\ &=\beta\left\{p_{n+2}+\beta p_{n+1}+\beta^2 p_n-\frac{7}{24(1-\beta)}\right\} \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha^3=\beta^3=\frac{1}{8},\ \alpha^2=\frac{-2\alpha-1}{4},\ \beta^2=\frac{-2\beta-1}{4}$$

に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{7}{24(1-\alpha)}&=\frac{7(1+\alpha+\alpha^2)}{24(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)} \\ &=\frac{7\left(1+\alpha+\frac{-2\alpha-1}{4}\right)}{24(1-\alpha^3)} \\ &=\frac{7(2\alpha+3)}{96\left(1-\frac{1}{8}\right)}=\frac{2\alpha+3}{12} \end{aligned}$$

同様に，$\frac{7}{24(1-\beta)}=\frac{2\beta+3}{12}$

よって

$$p_{n+3}+\frac{1}{2}p_{n+2}+\frac{1}{4}p_{n+1}-\frac{7}{12}$$
$$=\frac{1}{2}\left(p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{4}p_n-\frac{7}{12}\right)$$
$$p_{n+3}+\alpha p_{n+2}+\alpha^2 p_{n+1}-\frac{2\alpha+3}{12}$$
$$=\alpha\left(p_{n+2}+\alpha p_{n+1}+\alpha^2 p_n-\frac{2\alpha+3}{12}\right)$$
$$p_{n+3}+\beta p_{n+2}+\beta^2 p_{n+1}-\frac{2\beta+3}{12}$$
$$=\beta\left(p_{n+2}+\beta p_{n+1}+\beta^2 p_n-\frac{2\beta+3}{12}\right)$$

したがって

$$p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{4}p_n-\frac{7}{12}$$
$$=\left(p_2+\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{4}p_0-\frac{7}{12}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$p_{n+2}+\alpha p_{n+1}+\alpha^2 p_n-\frac{2\alpha+3}{12}$$
$$=\left(p_2+\alpha p_1+\alpha^2 p_0-\frac{2\alpha+3}{12}\right)\cdot\alpha^n$$
$$p_{n+2}+\beta p_{n+1}+\beta^2 p_n-\frac{2\beta+3}{12}$$
$$=\left(p_2+\beta p_1+\beta^2 p_0-\frac{2\beta+3}{12}\right)\cdot\beta^n$$

$p_0=1$，$q_0=r_0=0$ および⑤，⑦より

$$p_1=\frac{1}{2}r_0+\frac{1}{6}=\frac{1}{6},$$
$$p_2=\frac{1}{2}r_1+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q_0+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

これより

$$\begin{cases} p_{n+2}+\dfrac{1}{2}p_{n+1}+\dfrac{1}{4}p_n=\dfrac{7}{12} & \cdots\cdots⑧ \\ p_{n+2}+\alpha p_{n+1}+\dfrac{-2\alpha-1}{4}p_n=\alpha^{n+2}+\dfrac{2\alpha+3}{12} & \cdots\cdots⑨ \\ p_{n+2}+\beta p_{n+1}+\dfrac{-2\beta-1}{4}p_n=\beta^{n+2}+\dfrac{2\beta+3}{12} & \cdots\cdots⑩ \end{cases}$$

⑧−⑨，⑧−⑩ より

$$\begin{cases} \dfrac{1-2\alpha}{2}p_{n+1}+\dfrac{1+\alpha}{2}p_n=-\alpha^{n+2}+\dfrac{2-\alpha}{6} & \cdots\cdots⑪ \\ \dfrac{1-2\beta}{2}p_{n+1}+\dfrac{1+\beta}{2}p_n=-\beta^{n+2}+\dfrac{2-\beta}{6} & \cdots\cdots⑫ \end{cases}$$

⑪×$(1-2\beta)$−⑫×$(1-2\alpha)$ より

$$\frac{(1+\alpha)(1-2\beta)-(1+\beta)(1-2\alpha)}{2}p_n$$
$$=-\alpha^{n+2}(1-2\beta)+\beta^{n+2}(1-2\alpha)$$
$$+\frac{(2-\alpha)(1-2\beta)-(2-\beta)(1-2\alpha)}{6}$$
$$-\frac{3}{2}(\beta-\alpha)p_n$$
$$=\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}-2\alpha\beta(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})-\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$\beta\neq\alpha$ より

$$p_n=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}}{\beta-\alpha}+\frac{4}{3}\alpha\beta\cdot\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}+\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots⑬$$

ここで，(☆)にド・モアブルの公式を用いると

$$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \cdots\cdots⑭$$
$$\alpha\beta=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots⑮$$
$$\beta^n-\alpha^n=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)^n-\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{4}\right)^n$$
$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right\}^n$$
$$-\left\{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right\}^n$$
$$=\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{i}{2^{n-1}}\sin\frac{2n\pi}{3} \quad \cdots\cdots⑯$$

⑬に⑭，⑮，⑯を代入すると

$$p_n=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\dfrac{i}{2^{n+1}}\sin\dfrac{2(n+2)\pi}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}$$
$$\cdot\frac{\dfrac{i}{2^n}\sin\dfrac{2(n+1)\pi}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}+\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{\sin\dfrac{2(n+2)\pi}{3}}{3\sqrt{3}\cdot 2^{n-1}}+\frac{\sin\dfrac{2(n+1)\pi}{3}}{3\sqrt{3}\cdot 2^{n-1}}+\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{\sin\dfrac{2(n+2)\pi}{3}-\sin\dfrac{2(n+1)\pi}{3}}{3\sqrt{3}\cdot 2^{n-1}}+\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{2\cos\dfrac{(2n+3)\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{3}}{3\sqrt{3}\cdot 2^{n-1}}+\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{2\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}+\pi\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{3}\cdot 2^{n-1}}+\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{-\cos\dfrac{2n\pi}{3}}{3\cdot 2^{n-1}}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\cdots\cdots⑰$$

⑥，⑰より，$n\geqq 1$ のとき

$$q_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left\{1+\frac{1}{2^{n-2}}\cos\frac{2(n-1)\pi}{3}\right\}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\cos\left(\frac{2n+1}{3}\pi-\pi\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\cos\frac{2n+1}{3}\pi$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n+1}{3}\pi\right)\cdots\cdots⑱$$

$q_0=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{-1}}\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}(1-1)=0$ より，

⑱は $n=0$ のときも成り立つ。

⑦，⑱より，$n\geqq 1$ のとき

$$r_n=\frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\cos\frac{2n-1}{3}\pi\right)+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\cos\frac{2n-1}{3}\pi$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n-1}{3}\pi\right)\cdots\cdots⑲$$

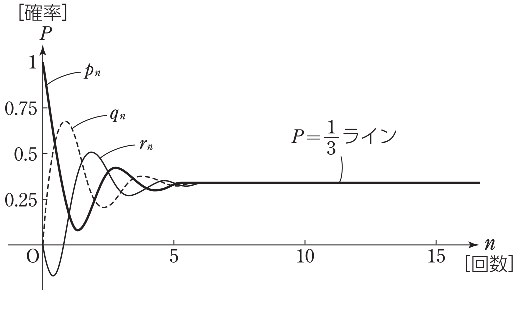
$r_0=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{-1}}\cos\frac{-\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}(1-1)=0$ より，

⑲は $n=0$ のときも成り立つ。

以上より

$$\begin{cases} p_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n\pi}{3}\right) \\ q_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n+1}{3}\pi\right)\cdots\cdots(☆☆) \\ r_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n-1}{3}\pi\right) \end{cases}$$

(☆☆)をグラフ化して，確率 p_n，q_n，r_n の変化の様子を調べてみると，以下になる。



§5. この操作を無限回試行したときの確率 p_n，q_n，r_n の状況

解答

$$\left|\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n\pi}{3}\right|\leqq\frac{1}{2^{n-1}}\left|\cos\frac{2n\pi}{3}\right|\leqq\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\left|\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n+1}{3}\pi\right|\leqq\frac{1}{2^{n-1}}\left|\cos\frac{2n+1}{3}\pi\right|\leqq\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\left|\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n-1}{3}\pi\right|\leqq\frac{1}{2^{n-1}}\left|\cos\frac{2n-1}{3}\pi\right|\leqq\frac{1}{2^{n-1}}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ より，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n\pi}{3}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n+1}{3}\pi=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2n-1}{3}\pi=0$$

よって

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}r_n=\frac{1}{3}}\cdots\cdots(★★)$$

(★★)はこの試行を数多く行うと点A，B，Cにそれぞれいる確率は $\frac{1}{3}$ に限りなく近づき，同様に確からしくなっていくことを表す。

グラフからも試行回数が少ない間は確率の変動が激しいが，試行回数を多くしていくと，直線 $P=\frac{1}{3}$ ラインに限りなく近づいていくことが視覚的にもわかる。

§6. 自作 公式 をより進化させた公式を作る

自作 公式 進化系：s，t，u を定数とするとき，隣接4項間の漸化式

$$a_{n+3}=sa_{n+2}+ta_{n+1}+ua_n\cdots\cdots(★)$$

は，3次方程式 $x^3=sx^2+tx+u$ の3つの解を α，β，γ とすると，以下の等比数列型の漸化式に変形できる。

$$a_{n+3}-(\beta+\gamma)a_{n+2}+\beta\gamma a_{n+1}$$
$$=\alpha\{a_{n+2}-(\beta+\gamma)a_{n+1}+\beta\gamma a_n\}$$

証明　3次方程式 $x^3-sx^2-tx-u=0$ の3つの解が α，β，γ より，解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=s & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-t & \cdots\cdots② \\ \alpha\beta\gamma=u & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①，②，③より，(★)は

$$
\begin{aligned}
&a_{n+3}\\
&=(\alpha+\beta+\gamma)a_{n+2}-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)a_{n+1}+\alpha\beta\gamma a_n\\
&=\alpha a_{n+2}+(\beta+\gamma)a_{n+2}-\alpha(\beta+\gamma)a_{n+1}\\
&\qquad -\beta\gamma a_{n+1}+\alpha\beta\gamma a_n
\end{aligned}
$$

ここで，α がついていない項を左辺，ついている項を右辺へ移項すると

$$
\begin{aligned}
&a_{n+3}-(\beta+\gamma)a_{n+2}+\beta\gamma a_{n+1}\\
&=\alpha a_{n+2}-\alpha(\beta+\gamma)a_{n+1}+\alpha\beta\gamma a_n
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
&a_{n+3}-(\beta+\gamma)a_{n+2}+\beta\gamma a_{n+1}\\
&=\alpha\{a_{n+2}-(\beta+\gamma)a_{n+1}+\beta\gamma a_n\}
\end{aligned}
$$

に変形できる。 終

しかしながら，筆者の感想としては，この自作 公式 進化系を試されたら実感できると思うが，漸化式から与えられる特性方程式が虚数解をもつときは扱いづらい。最初に紹介した自作 公式 の方がうまく作用する感じがする。特性方程式のすべての解が有理数であれば，自作 公式 進化系が非常に馴染む印象を受けた。是非，両公式とも試されてほしい。

§7. 最後に

本時は隣接4項間漸化式の面白さを紹介した。隣接5項間以上の漸化式も少々手間はかかるが，同様の方法で4次以上の高次特性方程式の解を求めて，等比数列型漸化式へ変形し，一般項を求めることができる。隣接漸化式の特性方程式や，連立漸化式の等比数列化した係数が虚数解をもつとき，途中過程はかなり複雑になるものの，虚数を極形式に変形後，ド･モアブルの公式を利用すれば，確率を1つの数式で表現できる。したがって，その数式によって確率の変化をグラフ化でき，さらには無限回試行の場合の確率の極限をグラフとセットで調べられることも非常に興味深い。しかし，入試でこのような複雑な隣接3項間以上の確率漸化式が出題されるときは，n の場合分けによって確率 p_n を求めさせることが多い。筆者が20年間公立高校で教壇に立っているときの印象として，数列分野の中でも特に漸化式は，生徒が苦手とする印象を受けるが，数列好きの生徒には課題研究として隣接4項間漸化式に触れさせても面白いのではないかと思う。ところで，ここでは高校生対象を念頭においていたため触れていないが，高専生～大学生対象には線形代数学で学ぶ行列の固有値および固有ベクトルを用いて対角化し，3×3の3次正方行列を利用して求められることを紹介しても学生の興味を引くと思う。

《参考文献》

〔1〕 ∑BEST　ウイナー　数学演習
数学Ⅰ・基礎解析・代数幾何・確率
受験編　文英堂
〔2〕「隣接4項間の漸化式を満たす一般項」

精松祐介　著
(鹿児島県　鹿児島工業高等専門学校准教授)