三角関数の図形的説明

杉下（すぎした）　和久（かずひさ）

§0. はじめに

　三角関数を教える時に確実な定着のためには多くの公式の暗記と演習が必要になってくる。特に和積，積和の公式について公式を丸暗記すると符号を勘違いしてしまう場合がある。証明に図形を用いて記憶の手助けを見つけた。

　数学Ⅲの三角関数の面積を計算だけに頼らず，数学Ⅱレベルの三角関数のグラフを使って面積計算の検算をする方法を紹介する。

§1. 積和の公式

　和積や積和の公式の証明をする時に多くの場合，加法定理から証明している。手順が長くなるためどうしても単調な授業になってしまう。そこで積和の公式を直接図形的な方法で証明する方法を考えた。

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

【証明】

図１のように点 A，B，P，Q，R をとり，

$0<\alpha<\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$，A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$

とおく。

長方形 OPRQ の面積 S に注目して $S=\cos\alpha\sin\beta$

となる。

一方 $S=\triangle\mathrm{OAP}+\triangle\mathrm{OBQ}+\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{RAB}$

$\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\sin\alpha$ に $\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OP}=\cos\alpha$

を代入して $\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha$ ……①

同様に $\triangle\mathrm{OBQ}=\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta$ ……② となる。

また

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)$

……③

$\mathrm{AR}=\sin\beta-\sin\alpha$，$\mathrm{BR}=\cos\alpha-\cos\beta$ であるから

$\triangle\mathrm{RAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AR}\cdot\mathrm{BR}$

$=\frac{1}{2}(\sin\beta-\sin\alpha)(\cos\alpha-\cos\beta)$ ……④

$S=\cos\alpha\sin\beta$

①＋②＋③＋④ をして

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta+\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)\\&\quad+\frac{1}{2}(\sin\beta-\sin\alpha)(\cos\alpha-\cos\beta)\\&=\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\\&\quad+\frac{1}{2}(\sin\beta\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta\\&\qquad-\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)\\&=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\\&=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

【証明終】

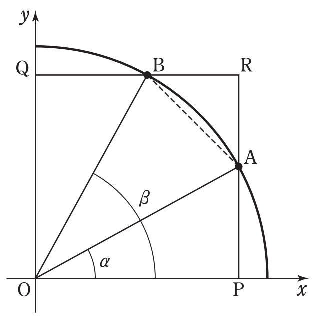


図１：積和の公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

【証明】

同様に点 A，B，P，Q，R をとり，$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，

A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\sin\beta,\ \cos\beta)$ となる。

長方形OPRQの面積Sは $S=\cos\alpha\cos\beta$ と表される。

$\triangle \mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha$，$\triangle \mathrm{OBQ}=\dfrac{1}{2}\cos\beta\sin\beta$

また $\triangle \mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\sin\left\{\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

$\mathrm{AR}=\cos\beta-\sin\alpha$，$\mathrm{BR}=\cos\alpha-\sin\beta$ であるから

$\triangle \mathrm{RAB}=\dfrac{1}{2}(\cos\beta-\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\beta)$

三角形の面積の総和は

$$
\begin{aligned}
S&=\cos\alpha\cos\beta\\
&=\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)\\
&\quad+\frac{1}{2}(\cos\beta-\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\beta)\\
&=\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)\\
&\quad+\frac{1}{2}(\cos\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\beta\\
&\qquad\qquad-\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta)\\
&=\frac{1}{2}(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)\\
&=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

【証明終】

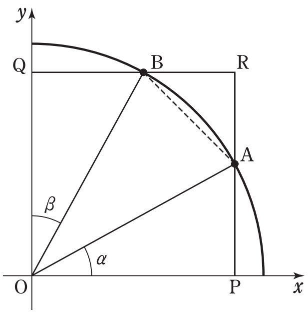


図２：積和の公式２

この証明をすることによって生徒は長さOPを$\cos\alpha$で表すことへの抵抗が減ったように思う。

§2. 和積の公式

似たような図を利用して，ひし形を作りベクトルを用いて２つの公式を一度に証明できる。

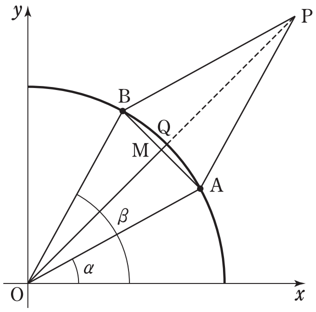


図３：和積の公式

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}
}
$$

【証明】

ひし形OAPBができるように点A，B，Pをとり，

$\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ $\left(0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

とおく。

Pの座標は$(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta)$となる。

ABの中点をMとし，直線OMと単位円の交点をQとする。$\angle \mathrm{QOA}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ より $\dfrac{\beta-\alpha}{2}+\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

であるからQの座標は$\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$となる。

$\angle \mathrm{BOM}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ と $\angle \mathrm{BMO}=\dfrac{\pi}{2}$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と表せ，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となる。

したがって

$$
\begin{aligned}
&(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta)\\
&=2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&=\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2},\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$ より

$$
\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
$$

【証明終】

「長さ１の$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$倍すると$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$になる」と覚えると記憶に残りやすいと思う。

§3. $y=\cos x$ を面積から眺める

数学Ⅲにおいて三角関数の面積の積分計算をした後，図形的に検算できる方法を探し，$y=\cos x$ 曲線の面積的な性質をまとめた。$y=\sin x$ は $y=\cos x$ を x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動したものなので $y=\sin x$ の問題にも利用できる。

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$ となり，長方形 OABC の面積が $\dfrac{\pi}{2}$ であるから $y=\cos x$ の曲線は長方形 OABC を面積 1 と $\dfrac{\pi}{2}-1$ に分ける曲線ということができる。また長方形 CBDE の面積が π であるから三角形状 ABC の面積を等積変形することによって $\displaystyle\int_0^{\pi}(\cos x+1)\,dx=\pi$ を図から算出できる。

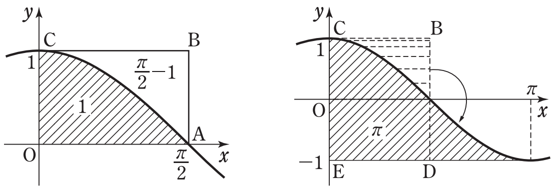


図 4：$y=\cos x$ のグラフ

例(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin^2 x)\,dx=1-\frac{\pi}{4}$

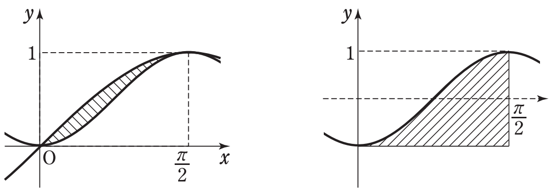


図 5：例(1)

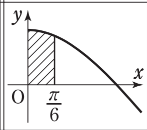
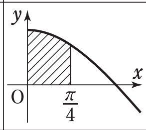
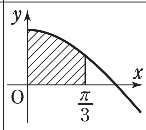
$y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ であるから $y=\sin^2 x$ のグラフは $y=\cos x$ を x 軸方向，y 軸方向にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小し上下反転させ，y 軸方向に $+\dfrac{1}{2}$ 平行移動したものである。

よって図 4 右図の斜線部分の面積を $\dfrac{1}{4}$ 倍すると図 5 右図の斜線部分の面積になる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}$$

したがって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin^2 x)\,dx=1-\frac{\pi}{4}$

次に $y=\cos x$ の区間が設定された面積についてまとめる。

表 1	(ア)	(イ)	(ウ)
図形			
面積	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

例(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{11}{24}\pi}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$

一見複雑そうな計算に見えるが $y=\sin x$ のグラフと並べて図を描くと一目瞭然である。

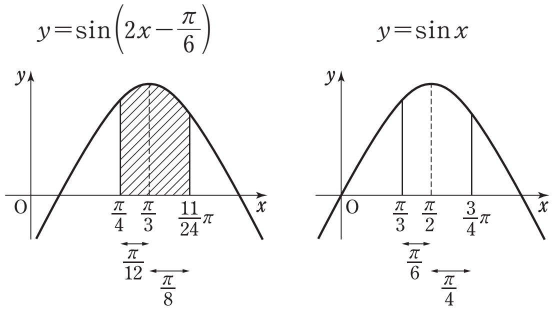


図 6：例(2)

図 6 の左図（求める面積）は右図の $\dfrac{1}{2}$ 倍になっていることが分かる。結果的に表 1 の(ア)と(イ)の和の半分であることが容易に分かる。

多くの生徒は積分の検算をするとき，同じ計算をもう一度実行している。しかし検算とは問題を別の観点から眺め，一度算出した答に確信を持つことである。別解の学習を敬遠する生徒も多くいるが，実際にこの内容を授業で紹介すると面積計算に関心を示す生徒が多かった。

（兵庫県　滝川高等学校）