限界まで考え抜く力
～「円と直線の位置関係」の問題を通して～

服部（はっとり）　慎吾（しんご）

§1. はじめに

数学Ⅱの単元「図形と方程式」の中に円と直線の位置関係の問題がある。その中でどの教科書にもよくあり，本校で使用している改訂版数学Ⅱ(数研出版)でも下記のような練習問題がある。

（改訂版数学Ⅱ教科書 p.91 の問題 27(2)より）
練習 27　次の円と直線の共有点の個数を求めよ。
(2)　$x^2+y^2=1$，$y=-2x+3$

（解き方） 判別式を利用
連立方程式から，y を消去し，x の 2 次方程式の判別式で判断する。

解答　連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ y=-2x+3 & \cdots\cdots② \end{cases}$ において，

②を①に代入して整理すると

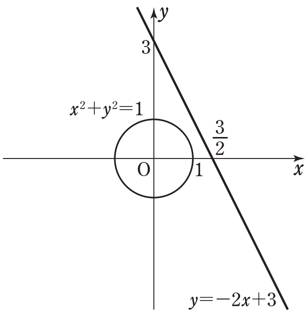
$5x^2-12x+8=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-6)^2-5\cdot 8=-4<0$

よって，共有点の個数は 0 個。　終

次に，よくある 別解
（解き方） 点と直線の距離の公式を利用
解答



原点と直線 $y=-2x+3$ の距離が $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ であり，それが円の半径 1 より大きいから，共有点の個数は 0 個。　終

この問題を授業で取り扱う際，単に円と直線の共有点の個数を求めることはよくある。しかし，これだけでは生徒の思考力を鍛えることができないと思い次のように発問をした。

『円と直線が共有点をもたないことの解法を思いつく限り考えなさい。』

生徒はこの発問に対し限界まで考え抜き，次の授業時にそれぞれの考えた解法を共有するということをした。その解法が，こちらの想像を超すさまざまな興味深いものが出てきたので，分析とともに以下に紹介したいと思う。

ちなみに，この時点で生徒は高校 1 年生で数学Ⅰと数学Aは学習済みである。

§2. 実践

（発問）
『円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=-2x+3$ の共有点をもたないことの解法を思いつく限り考えなさい。』

※ここからは実際に生徒の考えた別解ですべて略解である。

別解　**（生徒Aの解答）**
点 (1，1) は明らかに円外であり，$y=-2x+3$ は点 (1，1) を通り，右下がりの直線である。点 (1，1) を通る直線で右下がりの直線はどんな直線でも円と交わることはない。

（分析） 点 (1，1) を通り，x 軸に垂直な直線と y 軸に垂直な直線は円の接線となる。点 (1，1) を通り，

傾きが負であれば図より必ず円と直線は交わらないということを利用した解法である。この解法は，一般的ではないが，今回の問題としてははっきりしていて打って付けであった。

$\boxed{\text{別解}}$ **（生徒Bの解答）**

傾き -2 の直線で円と接するときの接線と x 軸と y 軸がつくる三角形の面積は，

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{5}{4}$ ……① である。

また，$y=-2x+3$ と軸がつくる三角形の面積は

$\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$ ……②

①と②で②の方が大きいので，直線は円と交わらない。

（分析） 相似な三角形の面積を考えた解法である。さらに細かく分類すると接線と軸の切片の座標を求めるのに，何通りかの方法があるだろう。

$\boxed{\text{別解}}$ **（生徒Cの解答）**

$y=-2x+3$ と軸がつくる三角形の面積を求め，直線が底辺になるときの三角形の面積で方程式を立て，点と原点の距離を求める。それが1より大きいので直線は円外。

（分析） 本質的には，§1. のよくある別解で紹介した「点と直線の距離の公式」を利用する解法と同じであるが，面積という視点を思いつき考えたということで別の解法とした。実際，この解法を考えた生徒が最も多かった。

$\boxed{\text{別解}}$ **（生徒Dの解答）**

任意の直線上の点を $\mathrm{T}(t,\ -2t+3)$ とする。円の中心と T の距離は，$\sqrt{5t^2-12t+9}$

$f(t)=5t^2-12t+9$ として，$f(t)$ の最小値は $\dfrac{9}{5}$ で $\sqrt{f(t)}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ で，$\dfrac{3}{\sqrt{5}}>1$（半径）より，交わらない。

（分析） 高校1年生の段階で直線上の任意の点をとって考えるという発想が成熟しているように思った。さらに，$\sqrt{f(t)}$ の最小値は $f(t)$ の最小値を求めればよく，$f(t)$ が2次関数であることから，既習の数学Iの2次関数だけの知識で解けるところもすばらしかった。

$\boxed{\text{別解}}$ **（生徒Eの解答）**

直線 $y=-2x+3$ に垂直で原点を通る直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ を考え，直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ と円の交点 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ と点 $(0,\ 3)$ を結ぶ。

下図のように，×の角度が鈍角になるので，円外にある。

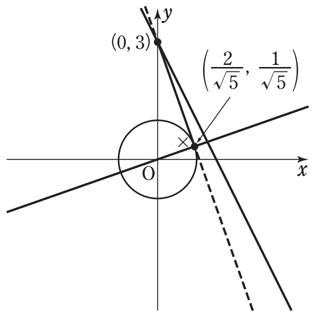
※×の角度が鈍角になることの説明。

×を α とする。余弦定理より，

$$3^2=1^2+\left(\sqrt{10-\frac{6}{\sqrt{5}}}\right)^2-2\cdot1\cdot\sqrt{10-\frac{6}{\sqrt{5}}}\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{50-6\sqrt{5}}}$$

$\sqrt{50-6\sqrt{5}}>0$，$\sqrt{5}-3<0$ より $\cos\alpha<0$ となり，α は鈍角。



（分析）

辺の長さや距離で判断することを考えるのが，一般的であると思うが，この生徒は既習の三角比から余弦定理を利用し，角度で判定しようとしたところがすばらしいと思った。

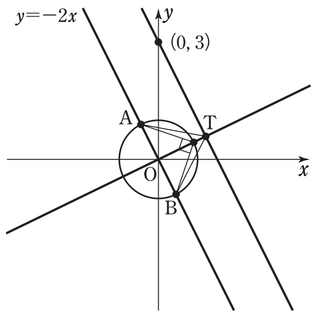
別解 （生徒Fの解答）

直線 $y=-2x$ を考え，円の交点をA，Bとし，$y=\frac{1}{2}x$ と $y=-2x+3$ の交点をTとする。

もし，接するなら　$\angle ATB=90°$

もし，2点で交わるなら　$\angle ATB>90°$

今回，$\angle ATB<90°$ なので，円と直線は交わらない。



（分析）

はっきり言って不十分であり説明になっていない。最終行の「$\angle ATB<90°$ なので」の説明が全くなく解答としては成立していないが，このことが証明できれば円と直線が交わらないことの証明になるという，証明の入り口までできていることと発想が柔軟で面白かったので紹介することにした。

§3．生徒から出なかった解法

その他，私が事前に用意しておいて，生徒からも出てこなかった解法を紹介する。

別解

傾きが -2 の直線（$y=-2x+k$）が接するときを考え，直角三角形の相似使って k を求める。$k=\sqrt{5}<3$ なので，接線より $y=-2x+3$ は円外にある。

別解

直線 $y=-2x+3$ に垂直で原点を通る直線を考え，その直線と $y=-2x+3$ の交点が円外にあることを使う。

別解

傾きが -2 の直線が第1象限で円と接するときを考え，接点を $(s,\ t)$ として，s と t を求め，接線の方程式を出す。y 切片3の方が大きいので，共有点なし。

以上，本質的に同じものもあると思うが，生徒の思考を理解していただくため，あえて別々の解法として紹介したことをご容赦願いたい。

§4．指導として

単に別解を紹介したり，考えたりするだけの授業はあるかもしれない。それでは生徒の思考力を鍛えられたとは言い難いのではないか。別解を考えそれぞれの解法の良いところや悪いところを見つけ分類分けなどすることでさらに思考は深まっていくだろう。その上で，再度教科書の解答はどうなのかを考えると，よりその問題の理解が深まるのではないかと思っている。

§5．おわりに

常日頃から生徒に「粘り強く考える力」をつけるため，答えを求めて終わりとせず，そこから数値を変えたり，一般化したり，別解を求めさせたりということをやっていた中の一例である。実は今回のこの授業を考える際，一般化された円と直線で考えさせようかと思ったが，あえて教科書の練習問題のままやることにした。その結果，一般化されたものでは思いつきにくいさまざまな解法が生まれた。この事例からもわかるように，数学において具体的な事柄を積み重ねていくことは，非常に重要である。

実際の教育現場では，ある程度進度を進めていかなければならないのが現状である。そのような，学校現場の中でいつもこのようなことができるわけではない。しかし，少し課題の出し方を変えるだけで，何の変哲もない練習問題がここまでの深い学びにつながっていくことを理解していただけたのではないかと思う。この実践例が他の先生方の授業改善の一助となれば幸いである。

《参考文献》

〔1〕 改訂版　数学Ⅱ　数研出版

（滋賀県立守山高等学校）