複素数係数の 4 次方程式における「解の公式」作成とその使い方

澤幡（さわはた）　通正（みちまさ）

§1. 解の公式

x についての 4 次方程式

$a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$ ……(＊)　の「解の公式」をデカルト(1596－1650)のアイデアをもとに作成できることを示す。ただし，$a_1 \neq 0$ で，係数はすべて複素数とする。

$x=y-\dfrac{a_2}{4a_1}$ とおいて(＊)を y の 4 次方程式に変換する。

$$a_1\left(y-\frac{a_2}{4a_1}\right)^4+a_2\left(y-\frac{a_2}{4a_1}\right)^3+a_3\left(y-\frac{a_2}{4a_1}\right)^2+a_4\left(y-\frac{a_2}{4a_1}\right)+a_5=0$$

展開して整理すると

$$a_1y^4+\left(-\frac{3a_2^2}{8a_1}+a_3\right)y^2+\left(\frac{a_2^3}{8a_1^2}-\frac{a_2a_3}{2a_1}+a_4\right)y+\left(-\frac{3a_2^4}{256a_1^3}+\frac{a_2^2a_3}{16a_1^2}-\frac{a_2a_4}{4a_1}+a_5\right)=0$$

$a_1 \neq 0$ であるから

$$y^4+\left(-\frac{3a_2^2}{8a_1^2}+\frac{a_3}{a_1}\right)y^2+\left(\frac{a_2^3}{8a_1^3}-\frac{a_2a_3}{2a_1^2}+\frac{a_4}{a_1}\right)y+\left(-\frac{3a_2^4}{256a_1^4}+\frac{a_2^2a_3}{16a_1^3}-\frac{a_2a_4}{4a_1^2}+\frac{a_5}{a_1}\right)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

①の形から 4 次方程式(＊)は

$$y^4+ay^2+by+c=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の形の 4 次方程式が解ければよいことがわかる。ただし，a，b，c は複素数の定数である。

ここで，4 次方程式②を解くために，恒等式

$$y^4+ay^2+by+c=(y^2-ly+m)(y^2+ly+n) \quad \cdots\cdots ③$$

を満たす複素数 l，m，n が存在することを示す[注意(1)]。

③の右辺を展開して，両辺の各項を比較すると

$$\begin{cases} a=m+n-l^2 & \cdots\cdots ④ \\ b=l(m-n) & \cdots\cdots ⑤ \\ c=mn & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

よって，l，m，n が a，b，c で表せればよい。次の 2 つに分けて考える。

(ア)　$l=0$ のとき，⑤より，$b=0$ となる。

このとき，④，⑥より，

$$m+n=a,\ mn=c$$

であるから，m，n を 2 つの解にもつ 2 次方程式の 1 つは

$$t^2-at+c=0$$

である。

これは t についての 2 次方程式であるから，m，n は，複素数の範囲内で解が作成できる。

(イ)　$l \neq 0$ のとき，④，⑤より，

$$\begin{cases} m+n=a+l^2 \\ m-n=\dfrac{b}{l} \end{cases}$$

である。これらより，m，n について解くと，

$$m=\frac{1}{2}\left(a+l^2+\frac{b}{l}\right) \quad \cdots\cdots ⑦,$$

$$n=\frac{1}{2}\left(a+l^2-\frac{b}{l}\right) \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧を⑥に代入すると

$$c=\frac{1}{4}\left(a+l^2+\frac{b}{l}\right)\left(a+l^2-\frac{b}{l}\right)$$

分母を払って l について整理すると

$$l^6+2al^4+(a^2-4c)l^2-b^2=0 \quad \cdots\cdots ⑨$$

ここで，$l^2=t$ とおくと

$$t^3+2at^2+(a^2-4c)t-b^2=0$$

これは，t についての 3 次方程式であるから，複素数の範囲内で解の公式が作成できる。l は $l^2=t$ とあわせると，複素数の範囲内で，a，b，c で表せるから，⑥，⑦，⑧より，m，n も複素数の範囲内で，a，

b, c で表すことができる[注意(2)]。

したがって，③より，4次方程式

$y^4+ay^2+by+c=0$ の解は

$$y^2-ly+m=0 \text{ または } y^2+ly+n=0$$

の解である。2次方程式は複素数の範囲内で解の公式を作成できるから，②の解の公式は複素数の範囲内で作成できる。

なお，②の解の公式の作成から⑨の解のうちどれか1つを求めればよいことがわかる。

[注意]

(1) 恒等式③のアイデアは，デカルトによる(『幾何学』P103)。ただし，4次方程式の係数は整数値で与えられている。

(2) 『幾何学』P103で，方程式「$x^4-4xx-8x+35=0$」を解くために，方程式「$y^6-8y^4-124yy-64=0$」への変形を考えているが，これは②で $a=-4$, $b=-8$, $c=35$ のときの方程式⑨への変形である。

一般的な4次方程式の解の公式の作成手順の1つは以上である。教科書で扱われている4次方程式は，有理数を代入することで因数定理を利用できる，もしくは因数定理が使えない場合は複2次式の形に限られている。ところが，2020年からの新課程では，例えば，花子さんと太郎さんの対話形式で上記のアイデアによる4次方程式の解法も学習できるのではないかと考える。実際に東北学院大・文，経済，教養(2018)では以下のような【問題】が出題された。もとの問題にある(1)，(2)は③と同様な誘導である。そこで以下のような【作問例】が考えられる。出題する場合は適宜空欄を作ればよいだろう。

§2. 問題例

【問題】

(『2018年版　数学Ⅰ・Ⅱ・A・B　入試問題集　文理系』，数研出版　P31　13(3))

方程式 $x^4-31x^2+20x+5=0$ を解け。

【作問例】

(1) 恒等式 $x^4+(-2+i)x^2+2(-2+i)x+2i=(x^2-lx+m)(x^2+lx+n)$ が成り立つように l, m, n の組 $(l,\ m,\ n)$ を1組求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

(2) 4次方程式 $x^4+(-2+i)x^2+2(-2+i)x+2i=0$ を解け。

ある日，花子さんと太郎さんのクラスでは，数学の授業で上のような課題が出された。以下の会話は協同して解くために，放課後に交わされたものである。

花子：(1)は右辺を展開して，両辺の各項を比較してみればよさそうだね。

太郎：$(x^2-lx+m)(x^2+lx+n)$
$=x^4+(m+n-l^2)x^2+l(m-n)x+mn$ だから，

$$\begin{cases} m+n-l^2=-2+i & \cdots\cdots① \\ l(m-n)=2(-2+i) & \cdots\cdots② \\ mn=2i & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

となるね。

花子：①と②から，m と n を l で表して，③に代入すれば，l だけの方程式になりそうだね。

太郎：②より，$l\neq 0$ だから $m-n=\dfrac{2(-2+i)}{l}$

この式と①より，

$$m=\frac{l^3+(-2+i)l+2(-2+i)}{2l},$$
$$n=\frac{l^3+(-2+i)l-2(-2+i)}{2l} \qquad \cdots\cdots④$$

が求められたよ。

花子：これらを③に代入してみるね。

$$\frac{\{l^3+(-2+i)l+2(-2+i)\}\{l^3+(-2+i)l-2(-2+i)\}}{4l^2}=2i$$

太郎：展開して l についての降べきの順に整理してみると

$$l^6+2(-2+i)l^4+3(1-4i)l^2-4(3-4i)=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

これは l の6次方程式だね。

花子：l の次数は2, 4, 6だから，l^2 を t に置き換えると

$$t^3+2(-2+i)t^2+3(1-4i)t-4(3-4i)=0$$

t の3次方程式で考えればよいんだね。

太郎：3次方程式の解の求める方法は，まず因数定理を利用できるかを考えるんだったね。

$f(t)=t^3+2(-2+i)t^2+3(1-4i)t-4(3-4i)$ とおいて，t に $-4(3-4i)$ の約数を順に代入して $f(t)=0$ となる t の値を求めればよいわけだ。

花子：係数をみて，例えば，$t=4$ としてみると

$$f(4)=4^3+32(-2+i)+12(1-4i)-4(3-4i)=0$$

1回で求められたよ。

太郎：……。

花子：組立除法を使うと，

$$f(t)=(t-4)\{t^2+2it+(3-4i)\}$$

と因数分解できるね。

太郎：$f(t)=0$ とおくと

$t=4$ または $t^2+2it+(3-4i)=0$

後半の２次方程式も解けるが，今回は $(l,\ m,\ n)$ を１組求めればよいから，$t=4$ より，例えば $l=2$ とすればよいのだろうね。

花子：そうね。残りの m，n の値も④に代入すると，$m=i$，$n=2$ となるから，答えは，１組なら $(l,\ m,\ n)=(2,\ i,\ 2)$ となるね。

太郎：(1)はこれで解決したが，(2)は(1)の結果より $(l,\ m,\ n)=(2,\ i,\ 2)$ だから

$$x^4+(-2+i)x^2+2(-2+i)x+2i$$
$$=(x^2-2x+i)(x^2+2x+2)$$

花子：すると，$x^2-2x+i=0$ または $x^2+2x+2=0$ を解けばよいのね。

太郎：$x^2+2x+2=0$ を解くと，$x=-1\pm i$ となる。あとは，$x^2-2x+i=0$ を解くために $(x-1)^2=1-i$ と変形して，$x-1=a+bi$(a，b は実数)とおいて，a，b の値を求めるんだったね。

花子：計算すると，

$(a,\ b)=\left(\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right)$，

$\left(-\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right)$ と求められたよ。

太郎：すると，４次方程式

$x^4+(-2+i)x^2+2(-2+i)x+2i=0$ の解は

$$x=-1\pm i,\ \frac{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}i}{2},$$
$$\frac{2-\sqrt{2+2\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}i}{2}$$

花子：これで課題は終わったね。ただ(1)の⑤で６次方程式の解のうち，l が２のときしか考えていないけれど，他の組 $(l,\ m,\ n)$ でも同じ答えになるのかしら。

太郎：①，②，③を満たす組 $(l,\ m,\ n)$ ならどれでもよいと思うね。

［追記］

2021 年度東京大学入試理系数学第６問で，§1 ③の $a=0$ の場合が出題された。

《参考文献》

〔１〕『幾何学』ルネ・デカルト，ちくま学芸文庫
〔２〕『2018 年版　数学Ⅰ・Ⅱ・A・B　入試問題集　文理系』，数研出版

（茨城県　水戸葵陵高等学校）