

数学Ⅱ・B 第4問

$$\begin{aligned}
 (1) \quad |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{3^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{54} = {}^{\text{ア}}3\sqrt{{}^{\text{イ}}6} \\
 |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{(2+2\sqrt{3})^2 + (2-2\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+8\sqrt{3}+16-8\sqrt{3}+16} \\
 &= \sqrt{48} = {}^{\text{ウ}}4\sqrt{{}^{\text{エ}}3} \\
 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 3(2+2\sqrt{3}) + 3(2-2\sqrt{3}) + (-6)(-4) \\
 &= 6+6\sqrt{3}+6-6\sqrt{3}+24 = {}^{\text{オカ}}36
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) = s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 54s + 36t$$

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC} \text{ より } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \text{ であるから } 54s + 36t = 0$$

$$\text{すなわち } 3s + 2t = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) = s\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + t|\overrightarrow{OB}|^2 = 36s + 48t$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 24 \text{ より } 36s + 48t = 24$$

$$\text{すなわち } 3s + 4t = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } s = -\frac{{}^{\text{キク}}2}{{}^{\text{ケ}}3}, t = {}^{\text{コ}}1$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{OC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0) \text{ であるから}$$

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12+12} = \sqrt{24} = {}^{\text{サ}}2\sqrt{{}^{\text{シ}}6}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = ({}^{\text{ス}}2, {}^{\text{セ}}2, {}^{\text{ソタ}}-4)$$

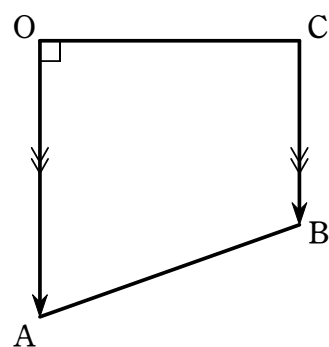
$$\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \text{ より } \overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{OA}, |\overrightarrow{CB}| \neq |\overrightarrow{OA}| \text{ であるから,}$$

四角形 OABC は

平行四辺形ではないが, 台形である。(チ③)

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ であるから, 四角形 OABC の面積は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{CB}|) \cdot |\overrightarrow{OC}| &= \frac{1}{2}(3\sqrt{6} + 2\sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{6} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = {}^{\text{ツテ}}30
 \end{aligned}$$



(4) 点 D の座標を $(x, y, 1)$ (x, y は実数) とおく。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 3x + 3y - 6$$

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OD} \text{ より } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \text{ であるから } 3x + 3y - 6 = 0$$

$$\text{よって } x + y = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}y$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 2\sqrt{6} \text{ より } 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}y = 2\sqrt{6}$$

$$\text{よって } x - y = \sqrt{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ より } x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって、点 D の座標は $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OD}| &= \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2} + \frac{3}{2} - \sqrt{2} + 1} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \cos \angle COD = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OD}|} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \angle COD \leq 180^\circ$ より $\angle COD = 60^\circ$

平面 α , β と、それらの上の点 O, A, B, C, D は右のような位置関係となる。よって、三角形 ABC を底面とする四面体 DABC の高さは

$$|\overrightarrow{OD}| \sin \angle COD = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{ここで、三角形 OAC の面積は} \quad \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 18$$

四角形 OABC の面積が 30 であることから、

$$\text{三角形 ABC の面積は} \quad 30 - 18 = 12$$

$$\text{以上より、四面体 DABC の体積は} \quad \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

